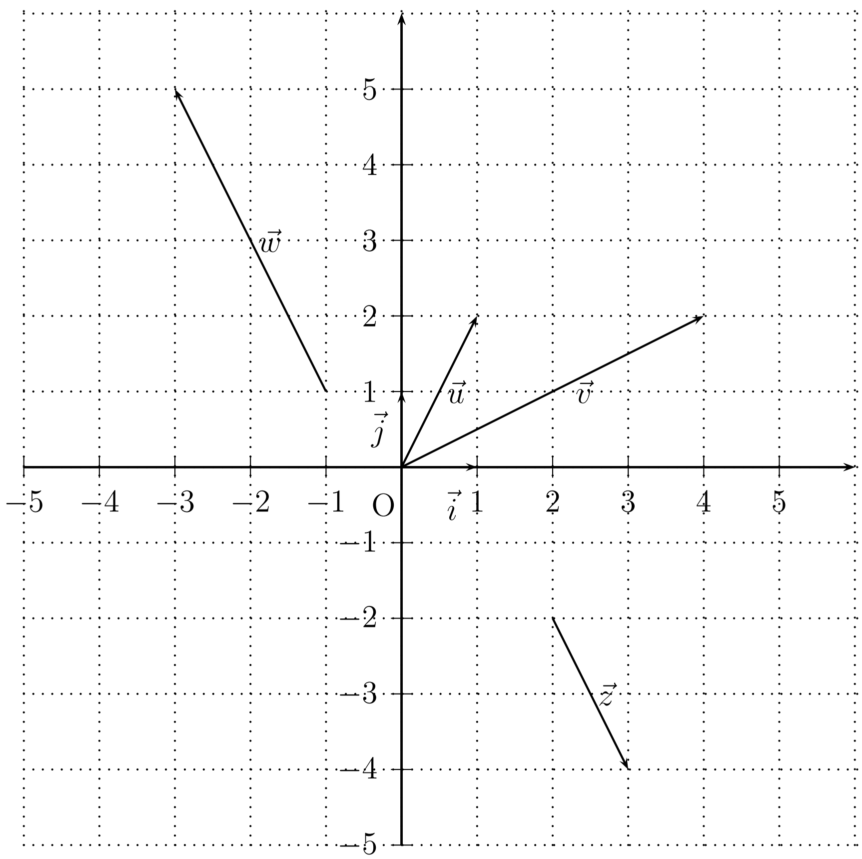
Autour des vecteurs et du produit scalaire

Exercice

Les questions de cet exercice sont liées au graphique ci-dessous.



1. Représentation de vecteurs
   Représenter sur le graphique ci-dessus les vecteurs :

$$\vec{u}+\vec{v} \quad ; \quad 2\vec{u}-\vec{v} \quad ; \quad \vec{u}+\vec{w} \quad ; \quad \vec{x}=\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}$$

2. Coordonnées de vecteurs
   Exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs suivants :
   $\vec{w} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; $\vec{z} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$
   $\vec{u} - \vec{w} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; $\vec{u} - \vec{i} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$; $\vec{u} + \vec{z} = \cdots\vec{i} + \cdots\vec{j}$

3. Compléter les pointillés :
   - $\|\vec{u}\| = \cdots\cdots$; $\|\vec{v}\| = \cdots\cdots$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \cdots\cdots$
   - $\|\vec{u} - \vec{i}\| = \cdots\cdots$
   - $\vec{w} = \cdots\vec{z}$
   - $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant deux vecteurs quelconques, on a :

   $$\|\vec{a} + \vec{b}\| \cdots \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

4. Produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée
   (a) Déterminer $\vec{u}.\vec{z}$ ainsi que $\vec{u}.\vec{u}$.
   (b) Déterminer une mesure, en degrés, de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Vecteurs et Physique

On rapporte le plan à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 1 : Soient deux forces

$$\vec{F_1} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{F_2} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

1. Représenter $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.
2. Calculer $\|\vec{F_1}\|$, $\|\vec{F_2}\|$ et $\|\vec{F_1} + \vec{F_2}\|$.

Exercice 2 : Soient $\vec{F_1}$ une force de norme (d'intensité) 3 N, de même sens que $\vec{i}$ et $\vec{F_2}$ une force de norme (d'intensité) 3 N telle que l'angle orienté $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ mesure 60°.

1. Représenter $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$. Quelle relation a-t-on entre $\|\vec{F_1} + \vec{F_2}\|$ et $\|\vec{F_1}\| + \|\vec{F_2}\|$?
2. Exprimer $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
3. Soit $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Représenter $\vec{F}$ et déterminer $\|\vec{F}\|$.

Rappels de cours sur le produit scalaire dans le plan et l'espace

1. **Différentes expressions du produit scalaire dans le plan**

   • Forme triangulaire : $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

   • Expression trigonométrique :
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

   • Expression analytique dans un repère orthonormé :
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

   • Expression à l'aide des projections :
   Si $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

2. **Produit scalaire dans l'espace**

   DÉFINITION 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.

   PROPRIÉTÉ 1 : Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors :

   $$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

3. **Propriétés du produit scalaire**

   PROPRIÉTÉ 2 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et k un réel.

   ☐ Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique (définie positive). Ainsi :
   - $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
   - $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
   - $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

   ☐ $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

   PROPRIÉTÉ 3 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

   PROPRIÉTÉ 4 : Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire
   Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   • $\vec{u}.\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
   • $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$