Année universitaire 2024-2025

TP OUTILS MATHÉMATIQUES ET LOGICIELS

SEMESTRE 2

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

TP 1 : DIAGRAMMES DE BODE

Objectifs : Réaliser des diagrammes de Bode (exacts et asymptotiques) à l'aide d'un tableur.

Lorsqu'on considère une fonction de transfert f, on utilise parfois une représentation module-phase. Il s'agit alors du diagramme de Bode, constitué de deux courbes :

- celle associée au gain (en dB) $\boldsymbol{G}$ défini par $\boldsymbol{G(\omega) = 20\log|f(\omega)|}$;
- celle associée à la **phase** $\boldsymbol{\varphi}$ donnée par un **argument de** $\boldsymbol{f(\omega)}$.

Pour l'axe des abscisses, on utilisera une échelle logarithmique permettant de représenter de grandes plages de ω. On rappelle que l'on définit une décade comme tout intervalle du type $[10^k; 10^{k+1}[$ où k est un entier.

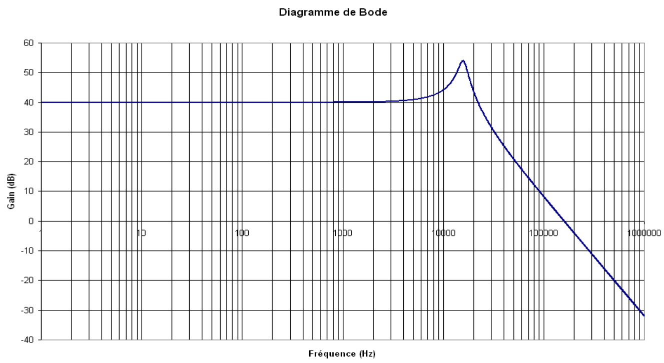


FIGURE 1 – Représentation du gain complexe

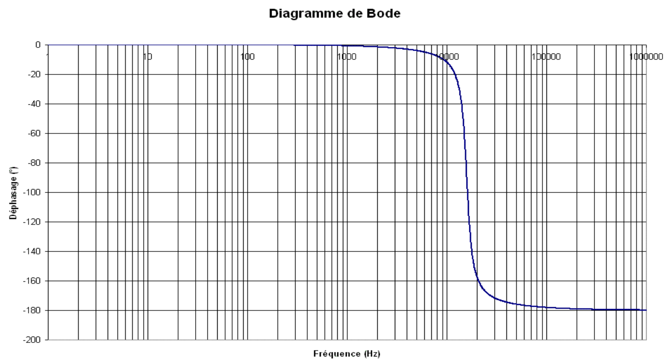


FIGURE 2 – Représentation de la phase

1. Création de décades
   (a) Créer une liste (suite) de pulsations ω de la forme $n \times 10^k$ où n est un entier compris entre 0 et 9, k variant de 0 à 5.
   (b) Proposer à l'utilisateur de sélectionner la puissance maximale k_{max} et afficher les décades associées permettant de balayer de 1 à $10^{k_{max}}$.
2. (a) On considère l'application f définie par $f(\omega) = j\dfrac{\omega}{100}$.
   i. Déterminer puis représenter le gain G associé à f.
   ii. Donner une expression simplifié de ce gain.
   iii. Déterminer la phase φ associée à f.

(b) On considère l'application f définie par

$$f(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{100}$$

i. Montrer que le gain associé à f est donné par : $G(\omega) = 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2\right)$.

ii. Représenter le gain complexe G associé à f.

iii. On définit une décade comme tout intervalle du type $[10^n; 10^{n+1}[$.
Déterminer lune valeur approchée des gains G associées aux valeurs de ω suivantes :
10 ; 10^2 ; 10^3 ; 10^4 et 10^5.

iv. Représenter le diagramme de Bode asymptotique pour le gain (c'est-à-dire en représentant non pas la courbe mais ses asymptotes).

v. On rappelle que $G(\omega) = 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2\right)$.
Donner une équation de ces asymptotes (on distinguera les cas ω proche de 0 et $\omega \to +\infty$).

vi. Déterminer la phase φ en utilisant la fonction arctan.

vii. Représenter la phase φ associée à f.

(c) On considère l'application f définie par

$$f(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

i. Déterminer le gain G associé à f .

ii. Représenter le gain complexe G associé à f pour différentes valeurs de ω_0.

iii. Donner une équation de ces asymptotes (on distinguera les cas ω proche de 0 et $\omega \to +\infty$).

iv. Quelle est l'abscisse du point d'intersection de ces deux asymptotes ?

v. Déterminer la phase φ en utilisant la fonction arctan.
La représenter ci-dessous.

3. L'objectif de cette question est de représenter le gain associé à la fonction f définie par :

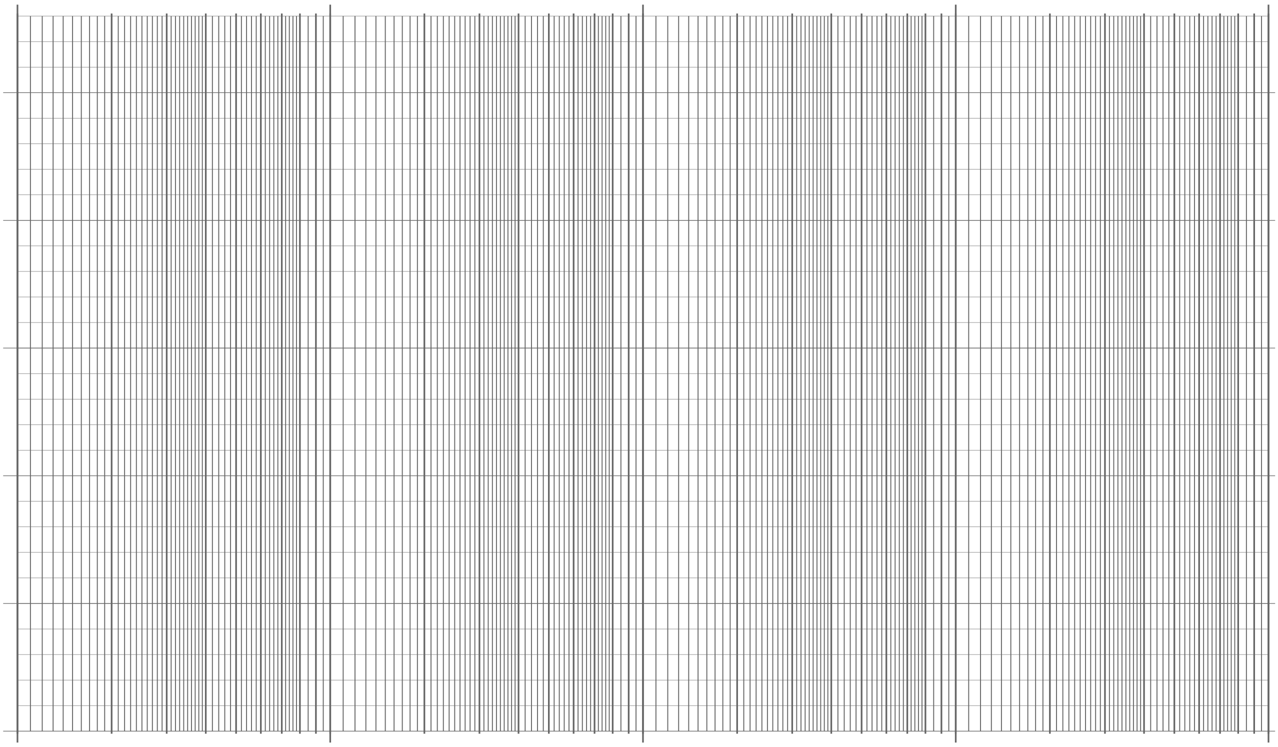
$$f(\omega) = \frac{R}{R+R'} \times \frac{1+j\dfrac{\omega}{100}}{\left(1+j\dfrac{\omega}{1000}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{10000}\right)} \qquad \text{où} \quad R = 1 \quad \mathrm{M\Omega} \quad \text{et} \quad R' = 9 \quad \mathrm{M\Omega}$$

(a) Déterminer $G(\omega)$.

(b) Tracer ci-dessous, sur $[10; 10^5]$, les courbes (asymptotiques) du gain complexe associées aux fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

$f_1(\omega) = -20\,;\ f_2(\omega) = 10\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{100^2}\right)\,;\ f_3(\omega) = -10\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{1000^2}\right)$ et $f_4(\omega) = -10\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{10000^2}\right)$

(c) En déduire l'allure de la représentation asymptotique de G.



TP 2 : TABL.EUR ET SIGNAUX

L'objectif de ce travail est d'utiliser un tableur (non exclusivement) afin d'obtenir la valeur moyenne ainsi que la valeur efficace d'un signal T-périodique du type

$$f : t \mapsto V_m \sin(\omega t + \varphi) + \mu$$

Des prolongements pourront être envisagés.
Sont fournis :

1. un cahier des charges (assimilable à des exigences client relatives au développement d'un produit) ;
2. une partie "théorique" permettant d'identifier certains outils indispensables à une réalisation efficiente ;
3. des compléments pour une éventuelle évolution du produit ;

Cahier des charges

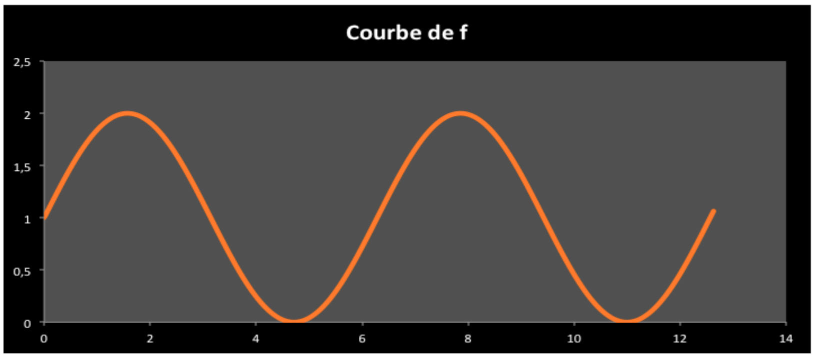
Objectif général :
Pour des valeurs choisies arbitrairement par l'utilisateur pour V_m, ω, φ et μ, représenter tout signal sur $[0; 2T]$ et calculer les valeurs moyennes et quadratiques.
Les calculs des images balaieront l'intervalle $[0; 2T]$ avec un pas égal à $\dfrac{T}{100}$.
Devront apparaître : la valeur moyenne du signal ; la moyenne quadratique ainsi que la valeur efficace.

Contraintes de réalisation :
• Les calculs de valeurs moyennes seront obtenus à l'aide de la fonction MOYENNE( ).
• L'utilisateur devra être face à une interface attractive. Voici un exemple :

Vm	1
omega	1
phi	0
mu	1

Période	6,28

Valeur moyenne	1,0
Moyenne Quadratique	1,5
Valeur efficace	1,2



Quelques indications / compléments "théoriques"

On rappelle que, si f est intégrable au sens de Riemann, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Comment peut-on déterminer la valeur moyenne d'une fonction f en utilisant la fonction MOYENNE( ) ?

Prolongement 1 : Compléments théoriques pour experts

Déterminer l'expression de la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal du type

$$f : t \mapsto V_m \sin(\omega t + \varphi) + \mu$$

Prolongement 2 : Évolution(s) du produit

Proposer une évolution permettant à l'utilisateur de choisir le pas (pour accroître la précision de l'approximation).
On pourrait envisager que l'utilisateur voit apparaître un indicateur de précision des approximations obtenues.

TP 3 : GESTION DE DONNÉES

L'objectif de ce travail est de manipuler des fichiers de données en utilisant les fonctions décrites ci-dessous en utilisant des fonctions spécifiques, présentées ci-dessous.

- La fonction **EQUIV** recherche un élément spécifique dans une plage de cellules, puis renvoie la position relative de l'élément dans la plage.
  Par exemple, si la plage A1 :A3 contient les valeurs 5, 25 et 38, la formule =EQUIV(25 ;A1 :A3 ;0) renvoie le nombre 2 étant donné que 25 est le deuxième élément dans la plage.

- La fonction **INDEX** renvoie une valeur ou une référence à une valeur provenant d'un tableau ou d'une plage.
  Les arguments associées sont la matrice (plage de cellule) considérée, le numéro de la ligne et le numéro de la colonne.

- La fonction **INDIRECT** renvoie la référence spécifiée par une chaîne de caractères.
  La formule =INDIRECT("B" & "2") renvoie le contenu de la cellule B2. "B" & "2" devient la chaîne de texte "B2".

Exercice 1 :

On considère le chiffre d'affaires (CA) en milliers d'euros d'une entreprise sur l'année 2024.

B	C
Mois	CA
Janvier	100
Février	200
Mars	150
Avril	200
Mai	225
Juin	250
Juillet	275
Août	300
Septembre	325
Octobre	350
Novembre	375
Décembre	400

1. Proposer une représentation graphique associée à ces données.
2. À l'aide de la fonction EQUIV, déterminer le rang du mois de Mai dans la liste Mois.
3. À l'aide de la fonction INDEX, déterminer le montant du chiffre d'affaires du mois de Mai.
4. (a) Proposer à un utilisateur de choisir le mois à l'aide d'une liste déroulante.
   On peut utiliser le menu
   Données
   Validation des données
   Critère de validation : Liste

   (b) Déterminer le montant du CA mensuel et cumulé entre Janvier et le mois sélectionné.

Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est d'utiliser les fonctions présentées précédemment dans un contexte plus complexe (résultats de semestre d'une promotion d'étudiants de DUT GEII) avec une interface ergonomique et originale. Le fichier tableur notes est téléchargeable sur le site de Florent Arnal, dans la partie IUT Semestre 2, TP Outils logiciels.

Cahier des charges

L'interface devra permettre à l'utilisateur de sélectionner le bac d'origine des étudiants à l'aide d'un menu déroulant et faire apparaître le nombre d'étudiants issus du bac sélectionné.

Devront également apparaître pour chaque étudiant titulaire du bac sélectionné :
- Rang sur le semestre
- Groupe de TP
- Moyenne semestrielle
- Moyenne des UE 1, 2 et 3.

On fera également apparaître, pour le groupe d'étudiants sélectionnés :
- la moyenne semestrielle
- un graphique présentant cette moyenne.

TP 4 : ÉTUDE DE PHÉNOMÈNES DISCRETS

Ce TP aborde notamment des méthodes de résolution numérique d'équation et équation différentielle.

Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Euler

Exercice 1 :
L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle (de Bernoulli)

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -y + y^2 \\ y(0) = 0,5 \end{array} \right. \qquad (E)$$

1. On utilisera, dans un premier temps, une méthode "approchée" appelée méthode d'Euler.

   Présentation de la méthode :
   On suppose que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On veut construire, de proche en proche, des points M_n conduisant à une représentation approchée de la fonction f (dépendant du pas h) vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$ c'est-à-dire ici : $f(0) = 0,5$.
   On rappelle que

   $$f(x+h) \underset{0}{\sim} f(x) + hf'(x)$$

   On a donc

   $$f(x_n+h) \underset{0}{\sim} f(x_n) + hf'(x_n)$$

   La suite des points (M_n) avec $M_n(x_n; y_n)$ est telle que :

   $$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hf'(x_n) \end{array} \right.$$

   où y_n est une valeur approchée de $f(x_n)$.

   (a) Déterminer x_0 et y_0.

   (b) En considérant (E), montrer que : $\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = (1-h)y_n + hy_n^2 \end{array} \right.$

   (c) A l'aide d'un tableur, déterminer la courbe "approchée" de f sur $[0;2]$ en prenant un pas h tel que :
      i. $h = 0,2$
      ii. $h = 0,05$.

2. Résoudre, avec Maple, l'équation différentielle (E).

3. (a) Tracer sur un même graphe, sur $[0;2]$, la solution exacte et les solutions approchées obtenues avec la méthode d'Euler.
   (b) Quelle est l'influence de la valeur de h sur la qualité de l'approximation ?

4. $\star\star\star$

On pose $y = \dfrac{1}{u}$.

(a) Déterminer une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, dont u est solution.

(b) Résoudre cette équation différentielle.

(c) En déduire y.

Résolution d'équations par dichotomie

Exercice 2 :
Le but de cet exercice est de déterminer un encadrement de la racine cubique de 5.
Pour ce faire, on va considérer l'équation

$$x^3 = 5 \qquad \text{i.e.} \qquad x^3 - 5 = 0$$

On note γ la solution positive de l'équation

$$g(x) = 0$$

avec $g(x) = x^3 - 5$.

1. On se propose à présent de déterminer un encadrement γ à l'aide de l'algorithme de dichotomie.

   Présentation de l'algorithme :
   La fonction g est supposée continue et monotone sur l'intervalle $[a_0; b_0]$, avec a_0 et b_0 tels que $g(a_0)$ et $g(b_0)$ soient de signes opposés.
   On suppose qu'au rang i, $g(a_i)$ et $g(b_i)$ sont de signes opposés.
   Soit $m_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ le "milieu" de l'intervalle $[a_i; b_i]$.
   On définit alors a_{i+1} et b_{i+1} de la façon suivante :
   - si $g(a_i)$ et $g(m_i)$ sont de signes opposés, alors $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = m_i$,
   - sinon, $a_{i+1} = m_i$ et $b_{i+1} = b_i$.

   La fonction g étant continue et monotone, γ est nécessairement dans l'intervalle $[a_{i+1}; b_{i+1}]$ qui devient le nouvel intervalle de recherche.
   L'algorithme est répété tant que $b_i - a_i > \varepsilon$ où ε est l'amplitude de l'encadrement attendu.

   (a) Représenter la fonction g et déterminer des valeurs possibles de a et b.
   Vérifier que γ et compris entre $a = 1$ et $b = 2$.

   (b) Implémenter cet algorithme sous la forme d'un fichier tableur présenté ainsi :

a	b	m	$g(a)$	$g(m)$	$g(a) \times g(m)$	$b - a$
1	2					

   (c) Déterminer un encadrement de γ d'amplitude 10^{-6}.

2. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-4} de la solution de l'équation

$$\ln x = 1$$

TP 5 : RÉSOLUTION DE SYSTÈMES PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

L'objectif de ce TP est de mettre en oeuvre la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes d'équations linéaires.

I Présentation de la méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss dont une première approche a été faite au lycée sous le nom de méthode par combinaison linéaire ou par addition. Cette méthode consiste à raisonner par équivalence afin de faire apparaître un autre système (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.

Pour cela on va transformer le système (S) en un système (S') en réalisant des opérations entre les diverses équations.

Théorème-Définition 1 : (Opérations élémentaires)
Les opérations élémentaires de la méthode de Gauss sont :

— L'échange de deux équations L_i et L_j avec $i \neq j$, notée $L_i \leftrightarrow L_j$.

— La multiplication d'une ligne L_i par un nombre α non nul, notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

— L'ajout à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$, elle notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Toutes ces opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent.

Définition 1 : (Méthode du pivot de Gauss)
La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer, avec des opérations élémentaires, le système linéaire initial (S) en un système équivalent triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

Remarque 1 : L'objectif est de faire apparaître des 0 dans la première colonne, puis la deuxième, ...

Résolvons le système $(S)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+z & = & 3 \\ 4x-y+z & = & 5 \\ -5x+y-z & = & -6 \end{array}\right.$.

On va conserver la ligne L_1, qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue x des autres lignes.
Pour cela, on retire $2L_1$ à L_2.
Concernant L_3, on lui affecte $2L_3 + 5L_1$. On obtient

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 2x+2y+z & = & 3 & \\ -5y-z & = & -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 12y+3z & = & 3 & L_3 \leftarrow 2L_3 + 5L_1 \end{array}\right. .$$

On conserve alors la ligne L_2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne.
Pour cela, on remplace la ligne L_3 par $5L_3 + 12L_2$. On trouve :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 2x+2y+z & = & 3 & \\ -5y-z & = & -1 & \\ 3z & = & 3 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 12L_2 \end{array}\right. .$$

Ce dernier système est facile à résoudre :

— la dernière ligne donne z ;

— en reportant, la deuxième ligne donne y ;

— et d'utiliser la première ligne pour obtenir x.

On obtient ainsi :

$$z = 1 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x = 1$$

Exercice 1 :
Résoudre "à la main", par la méthode du pivot de Gauss, les systèmes suivants d'inconnues réelles :

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - 3y = m \\ 5x + my = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 16 \\ -3x + y + z = -5 \end{cases}$$

Cas particuliers

— Si on arrive à une équation du type $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = a$ avec $a \neq 0$ alors **le système n'a pas de solutions**.

— Si on finit par arriver à un système du type : $\begin{cases} * + * + \text{...........} + * & = & * \\ \text{..............................} & & \\ * + * + \text{...........} + * & = & * \\ 0 + 0 + \text{..........} + 0 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & 0 \end{cases}$.

En enlevant les lignes inutiles, on obtient **un système rectangulaire avec une infinité de solutions.**

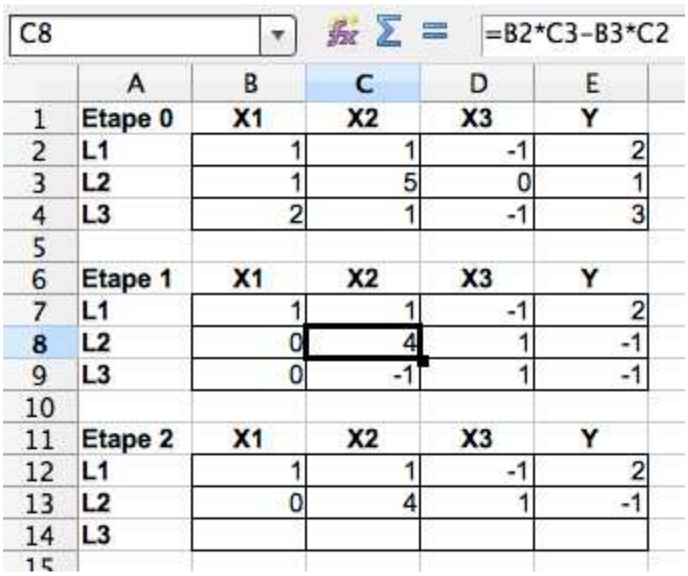
II Mise en œuvre avec un tableur

Exercice 2 :

Soient les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ci-dessous, à solutions réelles :

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 4 \\ x + 3y + z = 10 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 5y = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

1. À l'aide d'un tableur, résoudre le syystème (S_1) puis (S_2) en vous inspirant, pour la présentation, de la copie d'écran ci-dessous :



C8 =B2*C3-B3*C2

	A	B	C	D	E
1	Etape 0	X1	X2	X3	Y
2	L1	1	1	-1	2
3	L2	1	5	0	1
4	L3	2	1	-1	3
5					
6	Etape 1	X1	X2	X3	Y
7	L1	1	1	-1	2
8	L2	0	4	1	-1
9	L3	0	-1	1	-1
10					
11	Etape 2	X1	X2	X3	Y
12	L1	1	1	-1	2
13	L2	0	4	1	-1
14	L3				

2. Proposer une résolution automatisée de tout système admettant un unique triplet-solution.

Exercice 3 :

Améliorer la feuille de calculs ainsi que l'interface afin de fournir à tout utilisateur le nombre de solutions (aucune, une unique ou une infinité) pour tout système de 3 équations à trois inconnues.