

Année universitaire 2024-2025
BUT GEII

TP OUTILS MATHÉMATIQUES ET LOGICIELS

SEMESTRE 1

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : <http://flarnal.e-monsite.com>

TP 1 : DÉCOUVERTE DE MAPLE

Pour plus de précisions et d'exemples sur certaines fonctions MAPLE, consultez l'aide.

Pour s'entraîner

1. Donner une valeur approchée de e .
Donner une valeur approchée de π (avec 3 chiffres après la virgule).
2. Développer $(\sqrt{5} - 1)^2$ et $(x - 1)^4$.
3. Simplifier $\exp(a) \times \exp(b) + \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
4. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$.
5. Calculer, en utilisant le signe $\sum$, les sommes suivantes :
 $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^9$
 $B = 3 + 3^2 + \dots + 3^7$
 $C = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$
 $D = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
6. La fonction échelon unité u (Heaviside pour les anglosaxons) est notée Heaviside() avec Maple.
 - (a) Déterminer, à l'aide de Maple, $u(-2)$, $u(0)$ et $u(3)$ puis représenter la fonction de Heaviside.
 - (b) Pour différentes valeurs de a et b (avec $a < b$), représenter la fonction

$$f_{a,b} : x \mapsto u(x - a) - u(x - b)$$

- (c) Représenter, ci-dessous, la fonction $f_{a,b}$.
- (d) Représenter un signal constant sur $[1; 5]$, d'amplitude 3 et nul ailleurs.
- (e) Représenter la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$ et nulle ailleurs.

7. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x}}$.

Déterminer $f(-1)$, $f'(x)$ ainsi que $\int_2^3 f(x) dx$.

8. Déterminer les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - a}{x + a}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$.

9. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad x^2 > 4 \quad ; \quad \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \quad ; \quad x^3 - 2x + 1 = 0.$$

10. *Représentations graphiques et Approximations au voisinage de 0 :*

- (a) Déterminer l'approximation affine (DL d'ordre 1) de la fonction $\sin$ et tracer les représentations graphiques de $\sin$ et $x \mapsto x$ sur $[-1; 1]$.
- (b) Déterminer l'approximation affine (DL d'ordre 1) de la fonction $\tan$ et tracer les représentations graphiques de $\tan$ et $x \mapsto x$.
- (c) Déterminer une approximation par un polynôme de degré 2 (DL d'ordre 2) de la fonction $\cos$ et tracer les représentations graphiques de $\cos$ et du polynôme trouvé sur $[-\pi; \pi]$.

Pour aller plus loin

- 1. Faire un programme permettant de déterminer la valeur absolue d'un réel.
- 2. Faire un programme permettant de déterminer la somme des n premiers entiers où n est un entier naturel. On pourra s'assurer que le nombre saisi est bien un entier ...

TP 2 : Représentations graphiques

Objectif : Identifier et représenter des signaux usuels.

Exercices ne nécessitant pas l'usage d'un logiciel

Exercice 1 :

Représenter ci-dessous les fonctions sin et cos sur $[-2\pi; 2\pi]$.

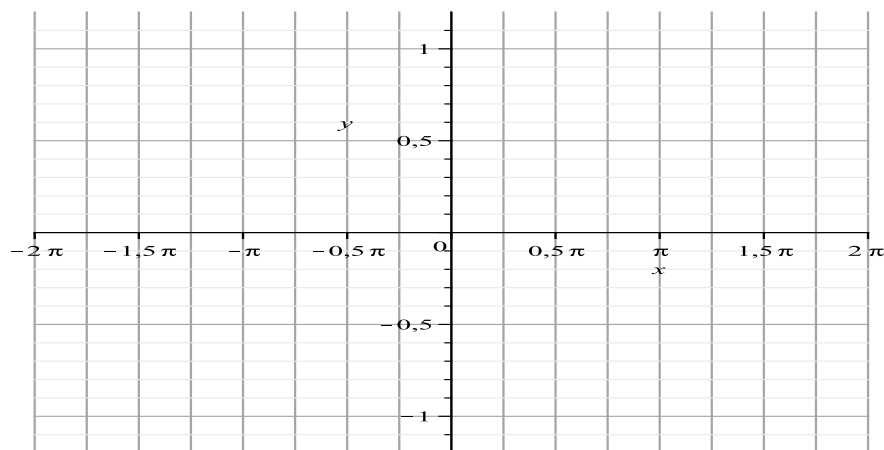


FIGURE 1 – Courbes des fonctions sin et cos.

Exercice 2 :

Les courbes ci-dessous représentent les fonctions suivantes :

$$f : t \mapsto \sin(\pi t) \quad g : t \mapsto 3 \sin(t) \quad h : t \mapsto \sin(2t) \quad k : t \mapsto 3 \sin(2\pi t)$$

Identifier la fonction associée à chacune des courbes ci-dessous.

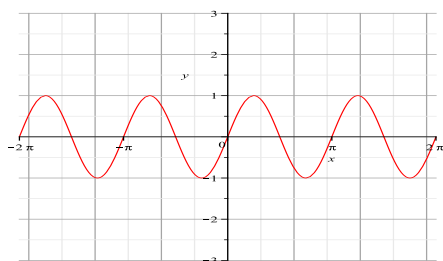


FIGURE 2 – Courbe de

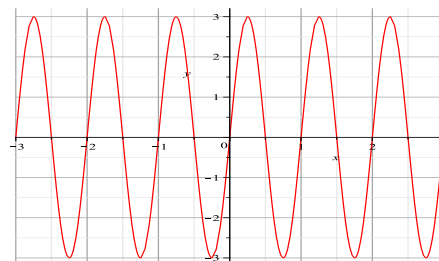


FIGURE 3 – Courbe de

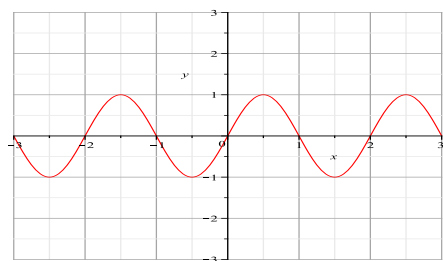


FIGURE 4 – Courbe de

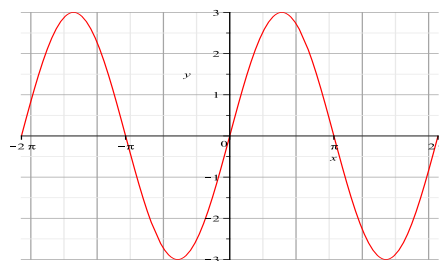
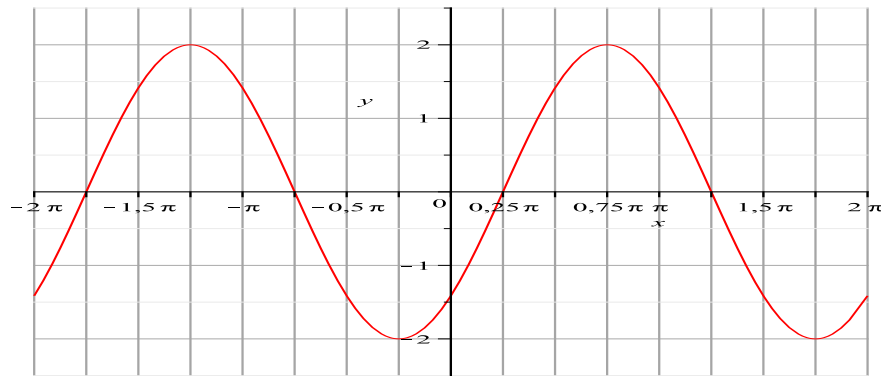


FIGURE 5 – Courbe de

Exercice 3 :

Sur le graphique ci-dessous, représenter la fonction $f : t \mapsto 2 \sin(t)$ et en déduire une expression de la fonction g dont la courbe est tracée sur la figure ci-dessous.

FIGURE 6 – Courbe de $g : t \mapsto \dots\dots\dots$ **Exercice 4 :**

On appelle fonction de Heaviside, la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Représenter les courbes des fonctions définies par :

$$\begin{array}{lll} f(t) = \sin(t) & g(t) = \sin(t)u(t) & i(t) = \sin(t)u(t - \pi) \\ j(t) = \sin(t - \pi)u(t) & k(t) = \sin(t - \pi)u(t - \pi) & \\ p_1(t) = u(t) - u(t - 1) & p_2(t) = t^2[u(t) - u(t - 1)] & p_3(t) = [u(t) - u(t - 1)] - [u(t - 1) - u(t - 3)] \end{array}$$

Exercices avec Maple

Pour rappel, pour créer une "fenêtre" sur $[a; b]$, il est recommandé d'utiliser la fonction

$$f_{a,b} : x \mapsto \text{Heaviside}(x - a) - \text{Heaviside}(x - b)$$

Exercice 5 : Représenter, en utilisant la fonction $u = \text{Heaviside}$, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f_{0,3}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_1(x) &= \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_5 \text{ est impaire et } f_5(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6 : Représenter, à l'aide de Maple, les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :

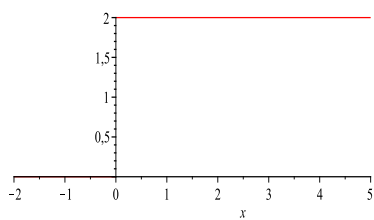


FIGURE 7 – Signal avec échelon

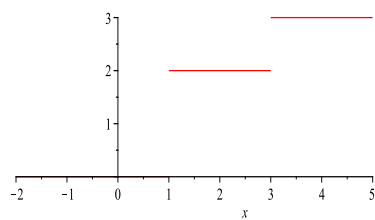


FIGURE 8 – Signal avec échelons

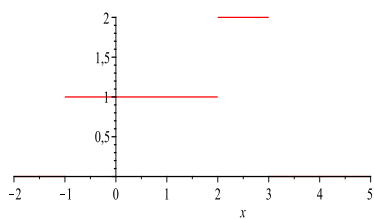


FIGURE 9 – Signal avec échelons

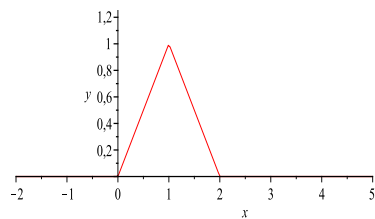


FIGURE 10 – Signal triangulaire

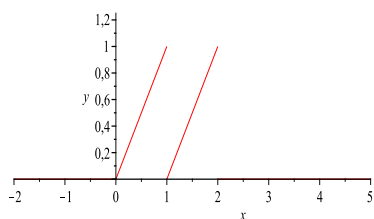


FIGURE 11 – Signal avec 2 rampes

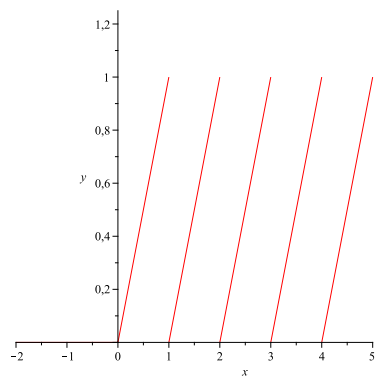


FIGURE 12 – Signal 1-périodique sur $[0; +\infty[$

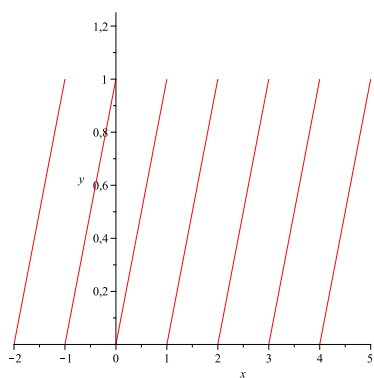
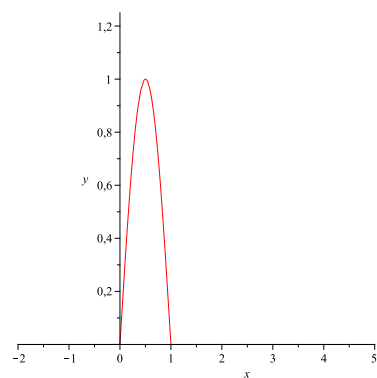
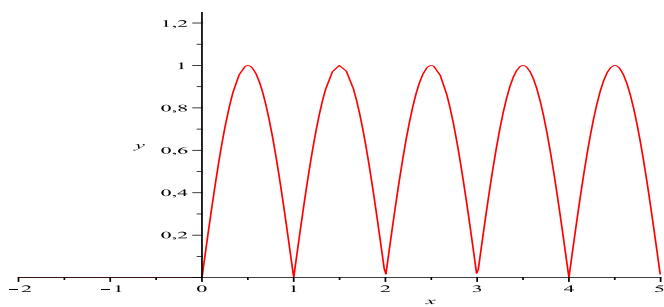
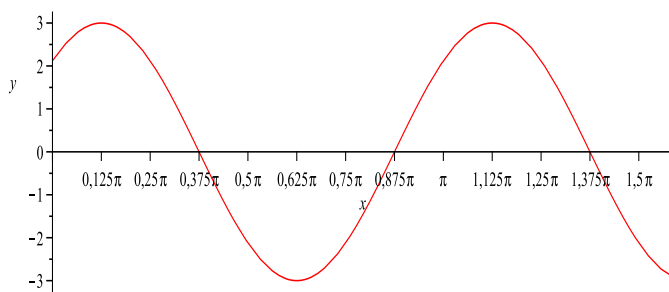
FIGURE 13 – Signal 1-périodique sur $\mathbb{R}$ 

FIGURE 14 – Signal avec une portion sinusoidale

FIGURE 15 – Signal sinusoidal redressé sur $[0; +\infty[$ FIGURE 16 – Signal sinusoidal sur $[0; +\infty[$

TP 3 : UTILISATION D'UN TABLEUR

Objectifs : Utiliser des fonctions de base d'un tableur pour répondre à une problématique statistique ou liée à du calcul intégral.

Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est de manipuler un tableur en utilisant des fonction de base.

Pour relancer des simulation, on utilisera la touche *F9*.

On rappelle que l'écart-type σ d'une série statistique $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ est tel que :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Les fonctions à utiliser sont les suivantes (précédées de =) :

- SI(Test logique;Valeur si vrai;Valeur si non)
- MOYENNE(), MIN(), MAX(), RACINE()
- ENT() qui correspond à la fonction Partie Entière
- ALEA() qui renvoie un nombre aléatoire appartenant à l'intervalle $[0; 1[$
- VAR.P(), ECARTYPEP() qui renvoient respectivement la variance et l'écart-type d'une série lorsque l'on a l'intégralité des observations.

Voici les notes obtenues par un étudiant lors du premier semestre :

Notes	Coefficients
8	1
10	5
12	3
15	4
16	1

1. Déterminer la moyenne semestrielle et l'écart-type des notes sans tenir compte des coefficients.
2. Déterminer la moyenne semestrielle et l'écart-type des notes en tenant compte des coefficients.
3. (a) Générer de manière aléatoire (fonction ALEA()) 5 notes entières comprises entre 0 et 20 (affectées des mêmes coefficients que précédemment).
 - (b) Déterminer automatiquement la note minimale et la note maximale.
 - (c) Déterminer la moyenne semestrielle en tenant compte des coefficients.
 - (d) Editer automatiquement la décision du jury suivant les modalités suivantes :
 - Si la moyenne est inférieure à 10, le semestre n'est pas validé.
 - Si la moyenne est supérieure ou égale à 10, le semestre est validé.

Exercice 2 : Calcul approché d'intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. On rappelle que

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

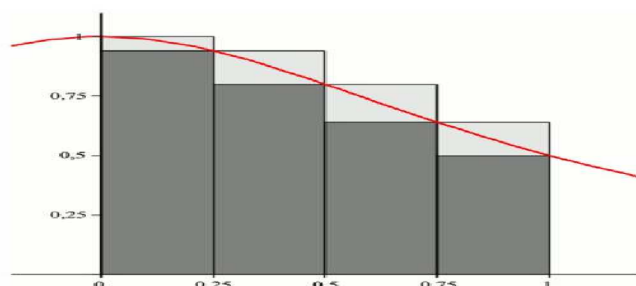


FIGURE 17 – Illustration de la méthode des rectangles

L'objectif de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_1^3 f(x) dx$ où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Dans cette question, on considère $n = 4$.
Déterminer une valeur approchée $S_4(f)$ de l'intégrale I .
2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, les calculs obtenus dans le cas où $n = 4$.
 - (a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir une valeur approchée de I dans le cas où $n = 100$.
 - (b) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir une valeur approchée de I pour une valeur de n quelconque.

Exercice 3 : Pour aller plus loin

Cahier de charges :

Créer une interface conviviale sous tableur permettant d'obtenir la courbe sur un intervalle quelconque $I = [a, b]$ et une valeur approchée de l'intégrale $\int_I f(x) dx$ d'une fonction polynomiale quelconque du type

$$\alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

TP 4 : SIMULATIONS AVEC UN TABLEUR

Objectifs : Utiliser un tableur pour simuler des phénomènes

Tous ces exercices seront traités avec la fonction ALEA().

Exercice 1 :

Dans le cas d'un amplificateur non inverseur à AOP, on rappelle que :

$$V_s = V_e \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

On considère les valeurs suivantes : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ à $\pm 5\%$ et $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ à $\pm 5\%$.

On suppose que : $V_e = 1 \text{ V}$ avec une imprécision $\Delta V_e = \Delta U_{offset} = \pm 15 \text{ mV}$.

1. Simuler 100 valeurs de R_1 , R_2 et V_e en tenant compte des incertitudes de mesures.
2. Déterminer les valeurs de V_s associées.
3. Donner la valeur cible de V_s ainsi qu'une estimation de l'erreur associée.

Exercice 2 :

Les compagnies aériennes pratiquent la sur-réservation (surbooking) c'est-à-dire qu'elles vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion.

Dans cet exemple, on considère une compagnie disposant d'un avion de 200 places et proposant 210 réservations lors d'un trajet très fréquenté (par exemple, Bordeaux-paris à 7h30 en semaine).

On fait les hypothèses suivantes :

- Les 210 places sont toujours réservées.
 - Chaque personne réservant une place d'avion a 92 % de chance de se présenter à l'embarquement.
1. (a) Réaliser une simulation du nombre de personnes se présentant à l'embarquement pour un vol lorsqu'il y a 210 réservations.
 (b) Réaliser la simulation de 1000 vols dans cette configuration avec 210 réservations.
 (c) Pour chaque vol, indiquer s'il y a ou non surbooking.
 (d) À l'aide des simulations réalisées, estimer la probabilité de surbooking pour un vol de ce type avec cette compagnie.
 2. On considère que le prix du billet est de 250 €.
 (a) Estimer le gain moyen par vol s'il n'y avait pas de surbooking.
 (b) Les passagers refoulés à l'entrée de l'avion ont droit à une indemnisation de 125 € par personne.
 Évaluer le gain moyen de la compagnie par vol en mettant en place le surbooking.

Exercice 3 :

Soit un carré de côté 1 et un cercle de rayon 1 (voir graphique ci-dessous).

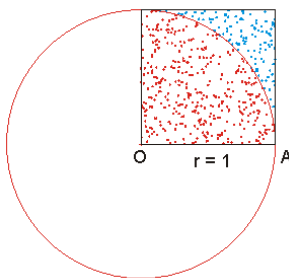


FIGURE 18 – Illustration de la méthode de Monté-carlo

En simulant des points à l'intérieur du carré et en considérant la proportion de ces points appartenant au quart de disque, déterminer une approximation de π .

