

**TEST 2 DE MATHÉMATIQUES**

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits.

Durée : 1,5 heure

**NOM, PRENOM, GROUPE :** .....

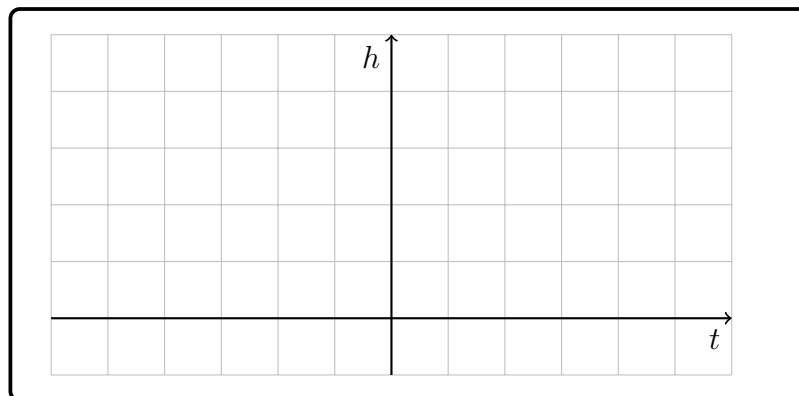
**Exercice 1 : 10 points**

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

où  $u$  est la fonction de Heaviside et  $a > 0$ .

1. Donner l'allure de la courbe de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ , en précisant les étiquettes (les chiffres) sur l'axe des ordonnées.



2. Montrer que la transformée de Fourier  $H$  de la fonction  $h$  est telle que, pour tout réel  $\omega$ , on a

$$H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

3. On s'intéresse à l'argument de  $H(\omega)$ ,  $\arg(H(\omega))$ , pour  $\omega \in [0, +\infty[$ .

(a) Donner l'expression de  $\arg(H(\omega))$

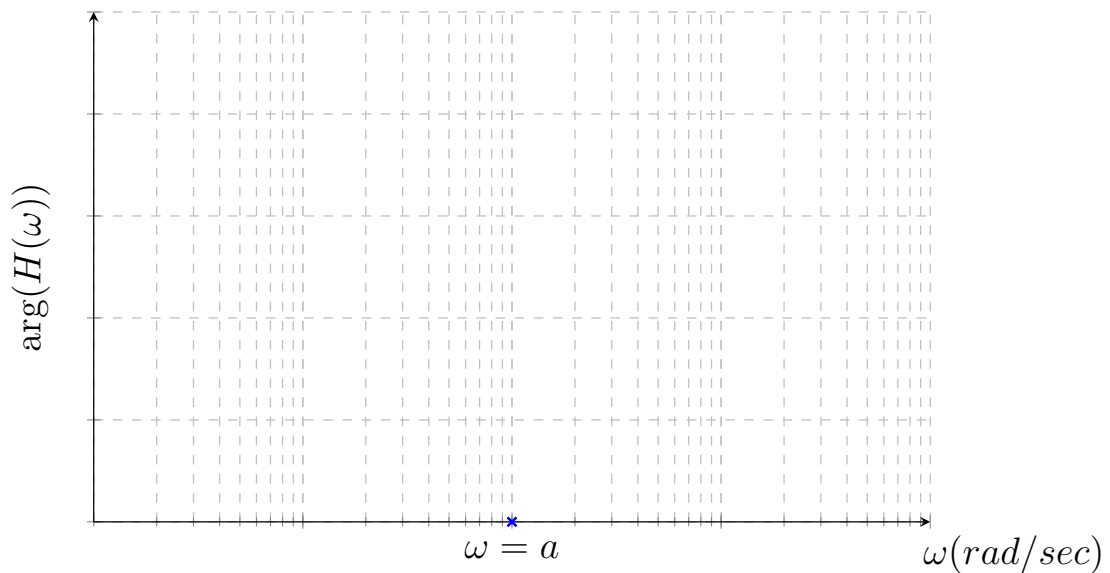
(b) Donner la valeur de  $\arg(H(0))$ , argument de  $H(\omega)$  à la pulsation  $\omega = 0$ .

(c) Evaluer la limite de  $\arg(H(\omega))$ , lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ .

(d) Déterminer la valeur de  $\arg(H(a))$ , argument de  $H(\omega)$  à la pulsation  $\omega = a$ .

(e) Déterminer, en fonction de  $a$ , la pulsation  $\omega_1$  pour laquelle l'argument est égal à  $-20^\circ$  ?

(f) En déduire l'allure de la courbe de  $\omega \mapsto \arg(H(\omega))$  sur une échelle logarithmique en  $\omega$ . Préciser les étiquettes (les chiffres) sur les deux axes, en choisissant de manière appropriées les décades sur l'axe des abscisses et la valeur des arguments sur l'axe des ordonnées.



4. On s'intéresse au module  $|H(\omega)|$  pour  $\omega \in [0, +\infty[$ .

(a) Donner l'expression de  $|H(\omega)|$  puis celle du gain  $|H(\omega)|_{dB}$  défini par

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \times \log |H(\omega)|$$

(b) Donner la valeur de  $|H(\omega)|_{dB}$  pour  $\omega = 0$  en fonction de  $a$ .

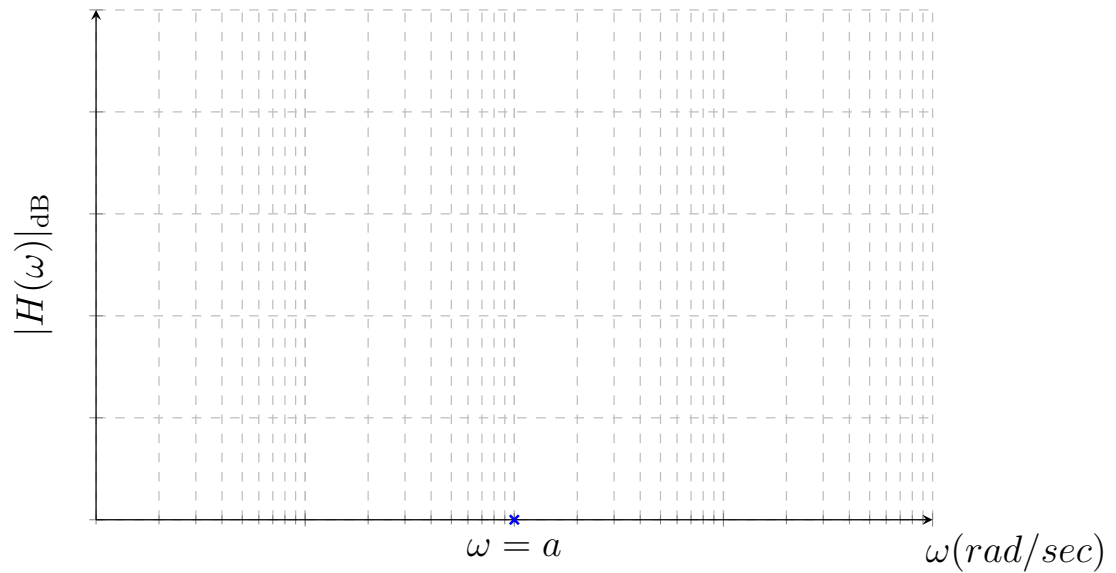
(c) Déterminer la valeur de  $a$  pour avoir un gain statique ( $\omega = 0$ ) de 40 dB.

(d) Donner un équivalent de  $|H(\omega)|_{dB}$  pour  $\omega \rightarrow +\infty$ .

(e) Déterminer la valeur du gain à la pulsation  $\omega = a$ .

(f) Déterminer la pulsation  $\omega_1$  pour laquelle le gain est égal à 0 dB ?

(g) En déduire l'allure de la courbe de  $\omega \mapsto \arg(H(\omega))$  sur une échelle logarithmique en  $\omega$ . Préciser les étiquettes (les chiffres) sur les deux axes, en choisissant de manière appropriées les décades sur l'axe des abscisses et la valeur des modules sur l'axe des ordonnées.



## Exercice 2 : 4 points

1. Soit  $S_N(z) = \sum_{k=0}^N z^{-k}$ , où  $z \in \mathbb{R}$ . Exprimer en fonction de  $z$ ,  $S_N(z)$ .

2. On souhaite, à présent, évaluer la somme  $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$ .

- (a) En faisant tendre  $N$  vers l'infini, trouver la condition de convergence de  $z^{-N} = \left(\frac{1}{z}\right)^N$ .

- (b) Lorsque  $z^{-N}$  est convergent, exprimer en fonction de  $z$  la somme  $S(z)$ .

- (c) Exprimer, en fonction de  $z$ , la somme  $S_2(z) = \sum_{k=2}^N z^{-k}$ .

### Exercice 3 : 4 points

1. Soit la séquence  $f_1(n) = 0.9^n u(n)$ , où  $u(n)$  désigne l'échelon de Heaviside discret. On suppose implicitement que la période d'échantillonnage est égale à  $T_e = 1s$ .

Tracer la séquence  $f_1(n)$ , puis calculer  $F_1(z)$ , la transformée en  $\mathcal{Z}$  de  $f_1(n)$ .



2. On considère maintenant la séquence  $f_2(n) = 0.9^n u(n - 2)$ .  
Tracer la séquence  $f_2(n)$ , puis calculer  $F_2(z)$ , la transformée en  $\mathcal{Z}$  de  $f_2(n)$ .



3. On définit dans le domaine de la transformée en  $\mathcal{Z}$ , la fonction :  $F_3(z) = \frac{5z - 4.2}{z^2 - 1.7z + 0.72}$ .  
Calculer  $f_3(n)$ , la transformée en  $\mathcal{Z}$  inverse de  $F_3(z)$ .

## Exercice 4 : 3 points

Ecrire un programme, qui respecte la syntaxe Matlab, qui :

1. définit un vecteur  $n$  de 0 à 100 par pas de 2,
2. définit la suite  $v_n = \frac{1}{n^2}$  qui associe à chaque valeur de  $n$ , la valeur correspondante  $v_n$ . On utilisera la variable  $v$  sous Matlab, à la place de  $v_n$ ,
3. trace  $v_n$  en fonction de  $n$ .

|  |
|--|
|  |
|  |

# Annexes

## Propriétés des transformées de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction  $t \mapsto x(t - \tau)$ , retardée de  $\tau$ , est donnée par

$$\mathcal{F}\{x(t - \tau)\}(\omega) = e^{-j\omega\tau} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$$

La transformée de Fourier de la dérivée d'un signal  $x$  est donnée par

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}(\omega) = (j\omega) \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$$

La transformée de Fourier de  $\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\}(\omega)$ , où  $\omega_0$  désigne une pulsation donnée, est décrit par

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\}(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega - \omega_0)$$

Le théorème de Parseval-Plancherel pour un signal  $x$  est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{x\}(\omega)|^2 d\omega$$

## Produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) \cdot g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt \text{ et } \mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) \times \mathcal{F}\{g\}(\omega)$$

## Transformées en $\mathcal{Z}$

- $\mathcal{Z}\{f([n - m]T_e)\}(z) = z^{-m} \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$ .
- $\mathcal{Z}\{f([n + 1]T_e)\}(z) = z[\mathcal{Z}\{f(nT_e)\} - f(0)]$  et  
 $\mathcal{Z}\{f([n + 2]T_e)\}(z) = z^2 \left[ \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) - f(0) - \frac{1}{z}f(T_e) \right]$ .
- $\mathcal{Z}\{a^{nT_e} f(nT_e)\}(z) = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$ .
- $\mathcal{Z}\{nT_e f(nT_e)\}(z) = -zT_e F'(z)$ .

| Terme général de la suite $\{f(nT_e)\}$ | Expression de la transformée en $\mathcal{Z}$                                   |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(nT_e)$                          | 1                                                                               |
| $u(nT_e)$                               | $\frac{z}{z - 1}, \quad  z  > 1$                                                |
| $nT_e \cdot u(nT_e)$                    | $\frac{zT_e}{(z - 1)^2}, \quad  z  > 1$                                         |
| $a^{nT_e} \cdot u(nT_e)$                | $\frac{z}{z - a^{T_e}}, \quad  z  >  a^{T_e} $                                  |
| $\cos(\omega nT_e) \cdot u(nT_e)$       | $\frac{z^2 - z \cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}, \quad  z  > 1$ |
| $\sin(\omega nT_e) \cdot u(nT_e)$       | $\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}, \quad  z  > 1$       |

## Transformées de Laplace

| Expression temporelle                  | Expression de la transformée de Laplace                                                        |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u(t)$                                 | $\frac{1}{p}$                                                                                  |
| $\delta(t)$                            | 1                                                                                              |
| $\cos(\omega t) u(t)$                  | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$                                                                     |
| $\sin(\omega t) u(t)$                  | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$                                                                |
| $\cosh(\omega t) u(t)$                 | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$                                                                     |
| $\sinh(\omega t) u(t)$                 | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$                                                                |
| $t^n u(t)$                             | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                                                                           |
| $e^{-at} u(t)$                         | $\frac{1}{p + a}$                                                                              |
| $t f(t) u(t)$                          | $-\frac{d}{dp}[\mathcal{L}\{f\}](p)$                                                           |
| $f(at) u(t)$                           | $\frac{1}{a} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{p}{a}\right)$                                         |
| $e^{-at} f(t) u(t)$                    | $\mathcal{L}\{f\}(p + a)$                                                                      |
| $f(t - a) u(t - a)$                    | $e^{-ap} \mathcal{L}\{f\}(p)$                                                                  |
| $f$ fonction périodique de période $T$ | $\mathcal{L}_0(p) \times \frac{1}{1 - e^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif |
| $f * g$ (produit de convolution)       | $\mathcal{L}\{f\}(p) \times \mathcal{L}\{g\}(p)$                                               |