Semestre 5 BUT GEII
Janvier 2025

Évaluation de Probabilités-Statistiques (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits. Table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ fournie en annexe.
Durée : 1h30

Exercice 1 : 12 points

Des machines fabriquent en série des plaques de tôle destinées au montage de transformateurs électriques. Ces plaques sont empilées et servent de conducteurs au champ magnétique du transformateur. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque plaque utilisable, associe son épaisseur, exprimée en mm. On suppose que

$$Y \sim \mathcal{N}(0,4;\sigma)$$

1. On suppose, dans cette question, que : $\sigma = 0,04$.
   (a) Déterminer la probabilité qu'une plaque, tirée au hasard dans la production, ait une épaisseur inférieure à $0,45$ mm.
   (b) Déterminer la probabilité qu'une plaque, tirée au hasard dans la production, ait une épaisseur comprise entre $0,36$ mm et $0,44$ mm.
2. On considère, dans cette question que $Y \sim \mathcal{N}(0,4;\sigma)$.
   (a) Déterminer la valeur de σ afin que 98% des plaques aient une épaisseur inférieure à $0,45$ mm.
   (b) On prélève 10 plaques.
   Déterminer la probabilité qu'au moins une plaque ait une épaisseur supérieure à $0,45$ mm.
3. La réalisation d'un transformateur nécessite un empilage de n plaques prises au hasard et numérotées de 1 à n (n entier non nul).
   On désigne par Y_i la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur de la plaque numérotée i $(1 \leq i \leq n)$.
   Les variables Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,4;0,025)$.
   On appelle H_n la variable aléatoire égale à l'épaisseur de ces n plaques, c'est à dire

$$H_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

   (a) Déterminer, en fonction de n, l'espérance μ_n de H_n.
   (b) Déterminer, en fonction de n, l'écart-type σ_n de H_n.
   (c) Déterminer la probabilité que l'épaisseur de n plaques soit inférieure à $(0,4 \times n)$ mm.

4. On considère désormais un empilement de 9 plaques d'une autre production.
   On considère que l'épaisseur X de ces 9 plaques est telle que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma) \text{ où } \mu \text{ et } \sigma \text{ sont inconnus}$$

   (a) Afin d'estimer l'épaisseur moyenne μ des empilements, on prélève un échantilon de taille 16. Les résultats observés sont les suivants :

```
[1] "epaisseur"

3.62 3.56 3.67 3.64 3.72 3.65 3.5 3.58 3.74 3.73 3.64 3.6 3.63 3.6 3.6 3.61
```

   Déterminer une estimation ponctuelle de l'épaisseur moyenne des plaques de la production dont est extrait cet échantillon.

   (b) En utilisant les résultats ci-dessous, déterminer l'écart-type observé s ainsi qu'une estimation de l'écart-type σ des épaisseurs des plaques de la production dont est extrait cet échantillon.

```
> ecarts = epaisseur -mean(epaisseur)
> SCE = sum ( ecarts^2 )
> SCE

[1] 0.05989375
```

   (c) En utilisant certains résultats fournis ci-dessous, tester l'hypothèse selon laquelle l'épaisseur moyenne observée est significativement supérieure à $3,6$ mm.
   Justifier la réponse en expliquant la démarche.

```
> n = length(epaisseur)
> pnorm(q = mean(epaisseur) , mean = 3.6 , sd = sd(epaisseur))

[1] 0.6860388

> 1-pnorm(q = mean(epaisseur) , mean = 3.6 , sd = sd(epaisseur)/sqrt(n))

[1] 0.02627428

> pnorm(q = 3.6 , mean = mean(epaisseur) , sd = sd(epaisseur)/sqrt(n))

[1] 0.02627428

> t.test(epaisseur, mu = 3.6, alternative = "greater")

        One Sample t-test

data:  epaisseur
t = 1.9386, df = 15, p-value = 0.0358
alternative hypothesis: true mean is greater than 3.6
95 percent confidence interval:
 3.602931      Inf
sample estimates:
mean of x
 3.630625
```

Exercice 2 : 8 points

On rappelle que la fonction de densité f_λ de la loi Exponentielle de paramètre λ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

On rappelle que la fiabilité R d'un système de durée de vie T est définie, pour tout téel t, par

$$R(t) = \mathbb{P}\left(T \geq t\right)$$

1. On suppose que $T \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.
   (a) Montrer que la fiabilité R d'un système dont la durée de vie est T est définie, pour tout réel t positif, par
   $$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$
   (b) Montrer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)$.
   (c) En déduire que $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$.
2. On dispose de deux éléments électroniques E_1 et E_2.
   La durée de vie T_i, du i-ième élément (exprimée en heures), est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ_i.
   Les MTBF (temps moyen de bon fonctionnement) de E_1 et E_2 sont respectivement égaux à 800 h et 1000 h.
   (a) Déterminer les valeurs de λ_1 et λ_2.
   (b) Calculer la probabilité que l'élément E_1 ait une durée de vie supérieure à 800 h.
   (c) On considère un système S constitué des deux éléments E_1 et E_2 en série.
      i. Montrer que la fiabilité R_s du système S est donnéee, pour tout réel t positif, par
      $$R_s(t) = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$
      ii. Calculer la probabilité que le système S ait une durée de vie supérieure à 800 h.
      iii. Déterminer le MTBF du système S.

Annexe : Table de la loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$

$$\Phi(t) = P(X^* \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000