

Correction de l'évaluation de Probabilités-Statistiques (OML)

Exercice 1 : 12 points

Des machines fabriquent en série des plaques de tôle destinées au montage de transformateurs électriques. Ces plaques sont empilées et servent de conducteurs au champ magnétique du transformateur. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque plaque utilisable, associe son épaisseur, exprimée en mm. On suppose que $Y \sim \mathcal{N}(0,4; \sigma)$.

1. On suppose, dans cette question, que : $\sigma = 0,04$.

(a) Déterminer la probabilité qu'une plaque, tirée au hasard dans la production, ait une épaisseur inférieure à 0,45 mm.

$$Y \sim \mathcal{N}(0.4; 0.04) \text{ donc } Y^* = \frac{Y - 0.4}{0.04} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\mathbb{P}(Y < 0.45) = \mathbb{P}(Y^* < 1.25)$$

$$[1] \quad 0.8944$$

1 point

(b) Déterminer la probabilité qu'une plaque, tirée au hasard dans la production, ait une épaisseur comprise entre 0,36 mm et 0,44 mm.

$$\mathbb{P}(0.36 < Y < 0.44) = \mathbb{P}(-1 < Y^* < 1) = 2\Phi(1) - 1$$

$$[1] \quad 0.6827$$

1 point

2. On considère, dans cette question que $Y \sim \mathcal{N}(0,4; \sigma)$.

(a) Déterminer la valeur de σ afin que 98% des plaques aient une épaisseur inférieure à 0,45 mm.

$$Y \sim \mathcal{N}(0.4; \sigma) \text{ donc } Y^* = \frac{Y - 0.4}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\mathbb{P}(Y < 0.45) = 0.98 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Y^* < \frac{0.05}{\sigma}\right) = 0.98 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.05}{\sigma}\right) = 0.98$$

1 point

$$\mathbb{P}(Y < 0.45) = 0.98 \Leftrightarrow \frac{0.05}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.98) \text{ donc } \sigma = \frac{0.05}{\Phi^{-1}(0.98)}$$

$$[1] \quad 0.024$$

1 point

(b) On prélève 10 plaques.

Déterminer la probabilité qu'au moins une plaque ait une épaisseur supérieure à 0,45 mm.

Le nombre de plaques ayant une épaisseur supérieure à 0,45 mm est distribué suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0.02)$.

1 point

La probabilité qu'au moins une plaque ait une épaisseur supérieure à 0,45 mm est donc $1 - 0.98^{10}$.

[1] 0.183

1 point

3. La réalisation d'un transformateur nécessite un empilage de n plaques prises au hasard et numérotées de 1 à n (n entier non nul).

On désigne par Y_i la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur de la plaque numérotée i ($1 \leq i \leq n$).

Les variables Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,4; 0,025)$.

On appelle H_n la variable aléatoire égale à l'épaisseur de ces n plaques, c'est à dire

$$H_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

(a) Déterminer, en fonction de n , l'espérance μ_n de H_n .

$$\mathbb{E}(H_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = 0.4 \times n$$

1 point

(b) Déterminer, en fonction de n , l'écart-type σ_n de H_n .

$$\mathbb{V}(H_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sigma^2 \times n \text{ donc } \sigma(H_n) = \sigma \times \sqrt{n} = 0.025\sqrt{n}.$$

1 point

(c) Déterminer la probabilité que l'épaisseur de n plaques soit inférieure à $(0,4 \times n)$ mm.

$$N_n \sim \mathcal{N}(0.4n; 0.025\sqrt{n}) \text{ donc } H_n^* = \frac{H_n - 0.4n}{0.025\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$
$$\mathbb{P}(H_n < 0.4n) = \mathbb{P}(H_n^* < 0) = 0.5.$$

1 point

4. On considère désormais un empilement de 9 plaques d'une autre production.
On considère que l'épaisseur X de ces 9 plaques est telle que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma) \text{ où } \mu \text{ et } \sigma \text{ sont inconnus}$$

- (a) Afin d'estimer l'épaisseur moyenne μ des empilements, on prélève un échantillon de taille 16. Les résultats observés sont les suivants :

```
[1] "epaisseur"
```

```
3.62 3.56 3.67 3.64 3.72 3.65 3.5 3.58 3.74 3.73 3.64 3.6 3.63 3.6 3.6 3.61
```

Déterminer une estimation ponctuelle de l'épaisseur moyenne des plaques de la production dont est extrait cet échantillon.

Une estimation ponctuelle de l'épaisseur moyenne des plaques de la production dont est extrait cet échantillon est

```
[1] 3.63
```

0.5 point

- (b) En utilisant les résultats ci-dessous, déterminer l'écart-type observé s ainsi qu'une estimation de l'écart-type σ des épaisseurs des plaques de la production dont est extrait cet échantillon.

```
> ecart = epaisseur - mean(epaisseur)
> SCE = sum ( ecart^2 )
> SCE
```

```
[1] 0.05989375
```

L'écart-type observé s est tel que $s = \sqrt{\frac{SCE}{n}}$.

```
[1] 0.061
```

0.5 point

Une estimation de l'écart-type σ des épaisseurs des plaques de la production dont est extrait cet échantillon est telle que $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SCE}{n-1}}$.

```
[1] 0.063
```

0.5 point

- (c) En utilisant certains résultats fournis ci-dessous, tester l'hypothèse selon laquelle l'épaisseur moyenne observée est significativement supérieure à 3,6 mm. Justifier la réponse en expliquant la démarche.

```
> n = length(epaisseur)
> pnorm(q = mean(epaisseur) , mean = 3.6 , sd = sd(epaisseur))

[1] 0.6860388

> 1-pnorm(q = mean(epaisseur) , mean = 3.6 , sd = sd(epaisseur)/sqrt(n))

[1] 0.02627428

> pnorm(q = 3.6 , mean = mean(epaisseur) , sd = sd(epaisseur)/sqrt(n))

[1] 0.02627428

> t.test(epaisseur, mu = 3.6, alternative = "greater")

      One Sample t-test

data:  epaisseur
t = 1.9386, df = 15, p-value = 0.0358
alternative hypothesis: true mean is greater than 3.6
95 percent confidence interval:
 3.602931      Inf
sample estimates:
mean of x
 3.630625
```

L'écart-type de la population est inconnu et la distribution considérée est gaussienne. On peut donc utiliser un test de Student avec $\mathcal{H}_0 : \mu = 3.6$ et $\mathcal{H}_1 : \mu > 3.6$

0.5 point

On considère donc

```
> t.test(epaisseur, mu = 3.6, alternative = "greater")$p.value

[1] 0.03580045
```

La p-valeur est inférieure à 5% donc la moyenne observée est significativement supérieure à 3,6 mm.

1 point

Exercice 2 : 8 points

On rappelle que la fonction de densité f_λ de la loi Exponentielle de paramètre λ est nulle sur \mathbb{R}^- et est définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

On rappelle que la fiabilité R d'un système de durée de vie T est définie, pour tout réel t , par

$$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t)$$

1. On suppose que $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) Montrer que la fiabilité R d'un système dont la durée de vie est T est définie, pour tout réel t positif, par

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Pour tout réel t positif, on a $R(t) = \mathbb{P}(T \geq t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_t^{+\infty} = e^{-\lambda t}$

1 point

(b) Montrer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \lambda x e^{-\lambda x}$ est la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)$.

Posons $G(x) = e^{-\lambda x} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)$.
 $G'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\lambda x} (-1) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

1 point

(c) En déduire que $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[e^{-\lambda x} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

1 point

2. On dispose de deux éléments électroniques E_1 et E_2 .

La durée de vie T_i , du i -ième élément (exprimée en heures), est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ_i .

Les MTBF (temps moyen de bon fonctionnement) de E_1 et E_2 sont respectivement égaux à 800 h et 1000 h.

(a) Déterminer les valeurs de λ_1 et λ_2 .

$$\frac{1}{\lambda_1} = 800 \text{ donc } \lambda_1 = \frac{1}{800} \text{ et } \frac{1}{\lambda_2} = 1000 \text{ donc } \lambda_2 = \frac{1}{1000}.$$

1 point

(b) Calculer la probabilité que l'élément E_1 ait une durée de vie supérieure à 800 h.

$$R_1(800) = e^{-1}$$

$$[1] \quad 0.368$$

1 point

(c) On considère un système S constitué des deux éléments E_1 et E_2 en série.

i. Montrer que la fiabilité R_s du système S est donnée, pour tout réel t positif, par

$$R_s(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$R_s(t) = \mathbb{P}([T_1 \geq t] \cap [T_2 \geq t]) = \mathbb{P}(T_1 \geq t) \times \mathbb{P}(T_2 \geq t) = e^{-\lambda_1 t} \times e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

1 point

ii. Calculer la probabilité que le système S ait une durée de vie supérieure à 800 h.

$$R_s(800) = e^{-\left(\frac{1}{800} + \frac{1}{1000}\right) \times 800} = e^{-1.8}.$$

$$[1] \quad 0.165$$

1 point

iii. Déterminer le MTBF du système S .

La durée de vie de S est caractérisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Le MTBF du système S est donc égal à

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\frac{1}{800} + \frac{1}{1000}} = \frac{1}{\frac{9}{4000}} = \frac{4000}{9}$$

$$[1] \quad 444$$

1 point