# CORRECTION TEST 2 DE MATHÉMATIQUES 2019

## Exercice 1 : 8 points

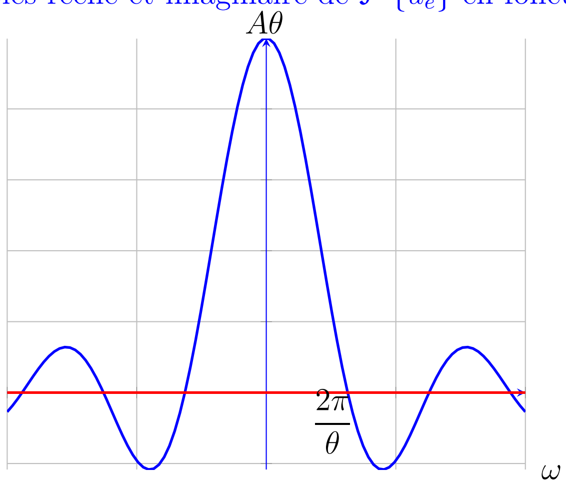
Première partie :
$< s >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\mathrm{d}t = A\dfrac{\theta}{T}$ $< s^2 >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t = A^2\dfrac{\theta}{T}$ donc $s_{eff} = A\sqrt{\dfrac{\theta}{T}}$.
Deuxième partie :

1. Pour tout $\omega$ non nul, on a

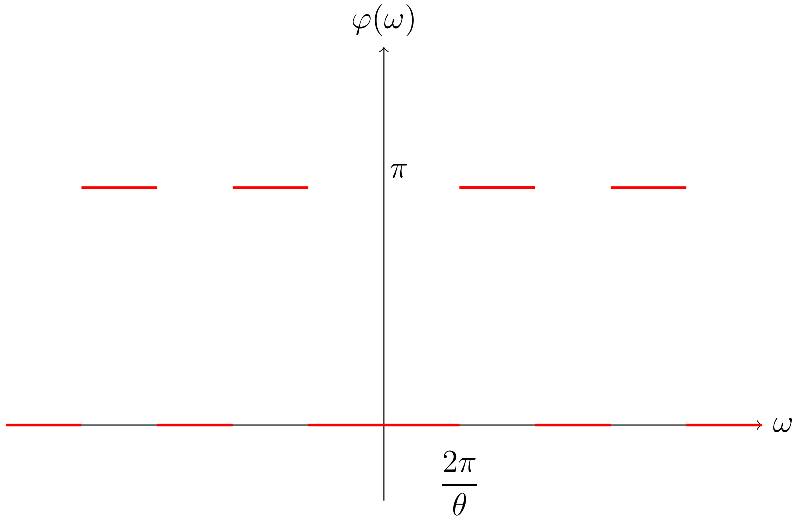
$$\mathcal{F}\left\{u_e\right\}(\omega) = 2\int_0^{\frac{\theta}{2}} A\cos(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2A}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) = A\theta\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)$$

2. Courbes

Représentation des parties réelle et imaginaire de $\mathcal{F}\left\{u_e\right\}$ en fonction de la pulsation $\omega$



3. Représentation de la phase $\varphi$ associée à $\mathcal{F}\{u_e\}$ en fonction de la pulsation $\omega$.




4. (a) L'expression de l'erreur relative $E(\omega)$ entre les deux réponses fréquentielles $\mathcal{F}\{h\}(\omega)$ et $\mathcal{F}\{u_s\}(\omega)$ est donnée par
$E(\omega) = \left|\dfrac{\mathcal{F}\{u_s\}(\omega) - \mathcal{F}\{h\}(\omega)}{\mathcal{F}\{h\}(\omega)}\right| = |1 - \mathcal{F}\{u_e\}(\omega)| = 1 - \text{sinc}\left(\dfrac{\omega\theta}{2}\right)$

   (b) On considère, dans cette question, $\theta = 10^{-6}$ seconde.
L'erreur est inférieure à 10% lorsque $\omega$ est inférieur à environ $1,6 \times 10^6$ ce qui conduit à une fréquence maximale d'environ 250000 Hz.

# Exercice 2 : 8 points

Première partie :

1. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$ donc RCV$=+\infty$.
2. $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$.
   Ainsi
$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
3. $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ donc $\frac{\cosh(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$.

Deuxième partie :
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E)\left\{\begin{array}{c} x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0 \\ y'(0) = 0 \text{ et } y(0) = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

On considère $y$, solution de $(E)$, écrite en utilisant son développement en série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

1. (a) $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.
   (b) $y(0) = a_0 = \frac{1}{2}$ induit $y'(0) = a_1 = 0$
2. $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (2-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 1$ soit
   $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}\right)x^n + 4a_1 + 2(a_0+a_1) - 1$
   $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty}\left[(n(n-1) + 4n + 2)a_n - a_{n-2})\right]x^n = 0$. Ainsi
   $\forall n \geq 2$, on a $(n(n-1) + 4n + 2)a_n - a_{n-2} = 0 \Leftrightarrow (n^2 + 3n + 2)a_n = a_{n-2}$ ce qui conduit à
$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-2}$$
3. $a_1 = 0$ donc, pour tout entier naturel $p$, $a_{2p+1} = 0$.
   $a_{2p} = \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}a_{2p-2} = \cdots = \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}\frac{1}{3\times 4}a_0 = \frac{1}{(2p+2)!}$. Ainsi
$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)!}x^{2p}$$
4. Pour tout $x$ non nul, on a
$$y(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)!}x^{2p+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} - 1\right)$$

On en déduit que, pour tout $x$ non nul, on a

$$y(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$$

# Exercice 3 : 4 points

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie :
$\sin\left(n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \frac{z}{z-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)z - z^2}{z^2 - z + 1}$$

Deuxième partie :
$F(z) = \dfrac{6z^2}{6z^2 - 5z + 1} = 1 + \dfrac{5z-1}{6z^2-5z+1} = 1 + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{9}{z-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{z-\frac{1}{3}}\right)$ La transformée en $\mathcal{Z}$ inverse de $F$ est donc la suite

$$n \mapsto \delta(n) + \frac{1}{6}\left(9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u(n-1)$$