CORRECTION DU TEST 1 - S2 MARS 2020

Exercice 1 : 10 points

1. On considère $f : x \mapsto \dfrac{x^3+4\mathrm{e}^{-x}}{x^2+2}$.

   $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

   $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{4}{2}$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2$.

2. $\sin X = X - \dfrac{X^3}{6} + X^3\varepsilon(X)$ et $X = 2x$ donc

   $\dfrac{2x-\sin(2x)}{x^3} = \dfrac{2x - \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)}{x^3} = \frac{4}{3} + \varepsilon(x)$. On en déduit que

$$\frac{2x-\sin(2x)}{x^3} \underset{x\to0}{\to} \frac{4}{3}$$

3. (a) $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + X^2\varepsilon(X)$.

   (b) $\sqrt{x^2+2x} = x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = x\left(1 + \dfrac{2}{2x} - \dfrac{4}{8x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right) = x + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$. Ainsi $f(x) - (x+1) = -\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon(x)\right) \underset{x\to0}{\to} 0^-$. La courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$ est située au-dessous de son asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x+1$

4. (a) $\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$ donc $\ln(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$.

   (b) $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$.

Exercice 2 : 7 points

On considère la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^2+4t+5}$$

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Il s'avère que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge donc $I = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3. $I = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.
4. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Pour tout réel x, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x+2} \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} + \arctan(x+2)$.

   (b) Allure de la courbe de F.

Exercice 3 : 3 points

1. L'équation différentielle (E) $y' + y = 1$ a pour solution $x \mapsto 1 + C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   De plus, $y(0) = 0$ donc $C = -1$. On a donc

$$y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

2. Représentation graphique, sur $[0; +\infty[$, de la solution de cette équation différentielle.