TEST 1 DE MATHÉMATIQUES

Semestre 2 — le jeudi 12 mars 2020

Aucun document autorisé. Calculatrice CASIO Collège autorisée. — Durée : 1 heure 15 minutes

Exercice 1 : 10 points

1. Donner, en justifiant la réponse, un équivalent "simple" de $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 4e^{-x}}{x^2 + 2}$ en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin(2x)}{x^3}$.
3. (a) Déterminer le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction $X \mapsto \sqrt{1 + X}$.
   (b) En déduire une équation d'une asymptote à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ en $+\infty$ en précisant leur position relative.
4. (a) Déterminer le DL d'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
   (b) En déduire le DL d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + x^2}{1 + x}\right)$.

Exercice 2 : 7 points

On considère la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 4t + 5}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que $I = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. Calculer I à l'aide du changement de variable $u = t + 2$.
4. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan(x + 2)$$

   (b) Donner l'allure de la courbe de F.

Exercice 3 : 3 points

1. Résoudre l'équation différentielle (E)

$$y' + y = 1 \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 0$$

2. Représenter graphiquement, sur $[0; +\infty[$, la solution de cette équation différentielle.

Annexe : Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$