CORRECTION DU TEST 2 - S2 - JUIN 2019

Exercice 1 : 7 points

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$

1 point

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$

1 point

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \mathrm{e} = 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \mathrm{e} = 4\mathrm{e}.$

1 point

2. Étudions la nature de la série de terme général : $u_n = 1 - \exp\left(\dfrac{-1}{n^3}\right)$.

$\mathrm{e}^X = 1 + X + X\varepsilon(X)$ donc $1 - \mathrm{e}^X \underset{0}{\sim} -X$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge donc $\sum u_n$ converge.

1 point

3. (a) $\dfrac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge.

0,5 point

(b) Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$

0,5 point pour DES + 0,5 point pour télescopage + 0,5 point pour résultat = 1,5 point

4. On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dont la limite est nulle (en l'infini).
On pose, pour tout entier n, $v_n = 2\,(u_n - u_{n+1})$.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 2(u_0 - u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 2u_0.$

1 point

Exercice 2 : 3 points

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = t \times [u(t) - u(t-3)]$$

1. Représentation de la fonction f.

1 point

2. $\mathcal{L}\{f\}(p) = \mathcal{L}\{tu(t)\}(p) - \mathcal{L}\{(t-3)u(t-3)\}(p) - 3\mathcal{L}\{u(t-3)\}(p)$ donc

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{1}{p^2} - \mathrm{e}^{-3p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}\right) = \frac{1-(3p+1)\mathrm{e}^{-3p}}{p^2}$$

1 point

3. $\mathcal{L}\{f\}(p) = \displaystyle\int_0^3 t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^3 + \frac{1}{p}\int_0^3 \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = -3\frac{\mathrm{e}^{-3p}}{p} + \frac{1}{p^2}\left(1-\mathrm{e}^{-3p}\right).$

1 point

Exercice 3 : 4 points

Lors de l'étude d'un oscillateur de Wien, on est amené à considérer l'équation différentielle

$$\tau^2 y'' + \tau(2-R)y' + y = 0 \quad (E)$$

où $\tau = RC$, R et C étant des constantes strictement positives.

1. L'équation caractéristique de (E) est $\tau^2x^2 + \tau(2-R)x + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \tau^2(2-R)^2 - 4\tau^2 = \tau^2\left[(2-R)^2 - 4\right] = \tau^2\left[R(R-4)\right]$.
   Les solutions de (E) sont de la forme $y : t \mapsto (at+b)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ lorsque $\Delta = 0$ soit $R = 4$ (τ et R étant strictement positifs).
   On a donc : $\tau = 4C$.

1 point pour Δ et 1 point pour τ (ou R)= 2 points

2. On pose $R = 4$.
   $\Delta = 0$ donc l'équation caractéristique de (E) admet pour solution $\frac{1}{\tau}$.
   D'après ce qui précède, les solutions sont de la forme $y : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}$. $y(0) = 0$ conduit à $b = 0$ et $y(1) = 1$ conduit à $a\mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}} = 1$ soit $a = \mathrm{e}^{\frac{-1}{\tau}}$. On a donc

$$y(t) = t\mathrm{e}^{\frac{t-1}{\tau}}$$

1 point

3. Pour $R = 5$, $\Delta = 5\tau^2 > 0$, les racines de l'équation caractéristique sont $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2\tau}$.
   D'où des solutions de la forme

$$t \mapsto A\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2\tau}t} + B\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2\tau}t}$$

1 point

Exercice 4 : 6 points

1. $y'' + 4y' + 5y = 5u(t) \qquad (E')$ avec $y(0) = y'(0) = 0$ conduit à
   $p^2\mathcal{L}\{y\}(p) + 4p\mathcal{L}\{y\}(p) + 5\mathcal{L}\{y\}(p) = \dfrac{5}{p}$ donc $\mathcal{L}\{y\}(p) = \dfrac{5}{p(p^2+4p+5)}$.

   1 point

   $\mathcal{L}\{y\}(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$

   1 point

   On a donc $\mathcal{L}\{y\}(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+2}{(p+2)^2+1} - \dfrac{2}{(p+2)^2+1}$
   L'équation différentielle (E') a donc pour solution

   $$t \mapsto \left\{1 - \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t)\right\} u(t)$$

   1 point

2. (a) On considère $\tau \neq 1$.
   L'équation différentielle $(E")$: $\tau y' + y = \mathrm{e}^{-t} \qquad$ avec $y(0) = 0$ a pour solution

   $$t \mapsto \frac{1}{1-\tau}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

   2 points

   (b) On considère $\tau = 1$.
   L'équation différentielle $(E")$: $y' + y = \mathrm{e}^{-t} \qquad$ avec $y(0) = 0$ a pour solution

   $$t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$$

   1 point