université de BORDEAUX

geii Génie électrique et informatique industrielle / iut de BORDEAUX

Semestre 2 Juin 2024

TEST 2 DE MATHÉMATIQUES (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits. Durée : 1,5 heure

NOM et Prénom : .....
Groupe : .....

Exercice 1 : 3 points

1. Déterminer les transformées de Laplace des signaux a et b définis par
   (a) $a(t) = u(t) - u(t-3)$

   (b) $b(t) = t\,[u(t) - u(t-3)]$

Exercice 2 : 2 points

Lorsqu'un corps de masse m chute dans l'air, sa vitesse v répond à l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho v = mg$$

où ρ est un coefficient permettant de modéliser les forces de frottement et g est la constante de gravitation terrestre. m, ρ et g sont donc des constantes.
Résoudre, **sans utiliser la transformée de Laplace**, l'équation différentielle (E).

Exercice 3 : 3 points

1. En utilisant une formule d'Euler, montrer que : $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

2. Déterminer la transformée de Laplace de f définie par

$$f(t) = \cos^2(\omega t)u(t)$$

3. En déduire la transformée de Laplace de g définie par

$$g(t) = \sin^2(\omega t)u(t)$$

Exercice 4 : 5 points

On souhaite résoudre le système différentiel (S) suivant :

$$-x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{-t}u(t) = x'(t) \qquad \text{et} \qquad x(t) - y(t) + \mathrm{e}^{-t}u(t) = y'(t)$$

avec $x(0) = y(0) = 1$.

1. Montrer que

$$(p+1)\mathcal{L}\{x\}(p) - \mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p+1} \qquad \text{et} \qquad -\mathcal{L}\{x\}(p) + (p+1)\mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p+1}$$

2. En utilisant les relations précédentes, montrer que

$$\mathcal{L}\{x\}(p) = \mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p(p+1)}$$

3. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 5 : 4 points

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x" + x = u(t) \text{ avec } x(0) = 1 \text{ et } x'(0) = 0$$

Exercice 6 : 3 points

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{4^{n+1}}$.

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Autour des transformées de Laplace

Transformées de Laplace et dérivation :
$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$.
$\mathcal{L}\{f''\}(p) = p^2\mathcal{L}\{f\}(p) - pf(0) - f'(0)$.
Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	**Expression de la transformée de Laplace**
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n\, u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\, u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t\, f(t)\, u(t)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\{f\}](p)$
$f(at)\ u(t)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{p}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\, f(t)\ u(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(p+a)$
$f(t-a)\, u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-a\,p}\mathcal{L}\{f\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\{f\}(p) \times \mathcal{L}\{g\}(p)$