TEST 2 DE MATHÉMATIQUES

Semestre 2 le mardi 11 juin 2019

Aucun document autorisé. Calculatrice CASIO Collège autorisée. Durée : 2 heures

Exercice 1 : 7 points

1. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$;
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+1}{n!}$ en utilisant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = 1 - \exp\left(\frac{-1}{n^3}\right)$.

3. (a) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{k(k-1)}$.

   (b) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$.

4. On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dont la limite est nulle (en l'infini).
   On pose, pour tout entier n,
$$v_n = 2\left(u_n - u_{n+1}\right)$$
   Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 2 : 3 points

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = t \times [u(t) - u(t-3)]$$

1. Représenter la fonction f.

2. Déterminer la transformée de Laplace de f en utilisant le formulaire.

3. Déterminer la transformée de Laplace de f par calcul intégral.

Exercice 3 : 4 points

Il n'est pas conseillé d'utiliser la transformée de Laplace pour cet exercice.
Lors de l'étude d'un oscillateur de Wien, on est amené à considérer l'équation différentielle

$$\tau^2 y" + \tau(2 - R)y' + y = 0 \quad (E)$$

où $\tau = RC$, R et C étant des constantes strictement positives.

1. En utilisant l'équation caractéristique de (E), déterminer la valeur de τ pour laquelle les solutions de (E) sont de la forme
$$y : t \mapsto (at + b)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$

2. On pose $R = 4$. Résoudre l'équation différentielle $\tau^2 y" - 2\tau y' + y = 0 \quad (E)$ en tenant compte des conditions $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

3. Donner la forme des solutions de (E) dans le cas où $R = 5$.

Exercice 4 : 6 points

1. Résoudre l'équation différentielle ci-dessous en utilisant la transformée de Laplace

$$y'' + 4y' + 5y = 5u(t) \qquad (E')$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

2. On considère l'équation différentielle (E")

$$\tau y' + y = \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{avec } y(0) = 0$$

(a) On considère $\tau \neq 1$.
Résoudre l'équation différentielle (E') (en considérant $y(0) = 0$).

(b) On considère $\tau = 1$.
Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$ (en considérant $y(0) = 0$).

Autour des transformées de Laplace

Transformées de Laplace et dérivation :

$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(p) = p\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - f(0)$.
$\mathcal{L}\left\{f''\right\}(p) = p^2\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - pf(0) - f'(0)$.
Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$
où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	**Expression de la transformée de Laplace**
$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n\, u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\, u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$t\, f(t)\, u(t)$	$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\left\{f\right\}](p)$
$f(at)\ u(t)$	$\dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\right\}\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\, f(t)\ u(t)$	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p+a)$
$f(t-a)\, u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-a\,p}\mathcal{L}\left\{f\right\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) \times \mathcal{L}\left\{g\right\}(p)$

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$