

TEST ÉCRIT DE OML

Semestre 4

Mars 2024

Aucun document autorisé. Calculatrice collège autorisée. Formulaire en annexes.
Durée : 1h.

Exercice 1 : 5 points

On considère la suite $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ avec $T_e = 1$ telle que

$$y(n+2) = 5y(n+1) - 6y(n)$$

avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

1. Calculer $y(2)$, $y(3)$ et $y(4)$.
2. En utilisant la transformée en $\mathcal{Z}$, déterminer $y(n)$ en fonction de n .
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de $y(n)$.

Exercice 2 : 6 points

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
2. En utilisant la relation précédente, déterminer deux réels α' et β' tels que $A^3 = \alpha' A + \beta' I_2$.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on souhaite déterminer l'expression de la matrice A^n .

(a) Montrer que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n .

Exercice 3 : 2 points

On considère le système

$$(S_a) \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

1. À quelle condition sur a le système (S_a) admet-il un unique couple-solution ?
2. (Bonus / 1 point)
Quelle est alors le couple-solution de ce système ?

Annexe sur la transformée en $\mathcal{Z}$

- $\mathcal{Z} \{f([n-m]T_e)\}(z) = z^{-m} \mathcal{Z} \{f(nT_e)\}(z).$
- $\mathcal{Z} \{f([n+1]T_e)\}(z) = z [\mathcal{Z} \{f(nT_e)\} - f(0)]$ et
 $\mathcal{Z} \{f([n+2]T_e)\}(z) = z^2 \left[\mathcal{Z} \{f(nT_e)\}(z) - f(0) - \frac{1}{z} f(T_e) \right].$
- $\mathcal{Z} \{a^{nT_e} f(nT_e)\}(z) = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right).$
- $\mathcal{Z} \{nT_e f(nT_e)\}(z) = -zT_e F'(z).$

Terme général de la suite $\{f(nT_e)\}$	Expression de la transformée en $\mathcal{Z}$
$\delta(nT_e)$	1
$u(nT_e)$	$\frac{z}{z-1}, \quad z > 1$
$nT_e . u(nT_e)$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}, \quad z > 1$
$a^{nT_e} . u(nT_e)$	$\frac{z}{z-a^{T_e}}, \quad z > a^{T_e} $
$\cos(\omega nT_e) . u(nT_e)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}, \quad z > 1$
$\sin(\omega nT_e) . u(nT_e)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}, \quad z > 1$