

TEST 1 DE MATHÉMATIQUES (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits.

Durée : 1,5 heure

NOM, PRENOM, GROUPE :

Exercice 1 : 2 points

1. Déterminer la transformée de Laplace du signal $f : t \mapsto (t + 2)u(t)$.

2. Déterminer la transformée de Laplace du signal $g : t \mapsto \cos(2t)e^{-t}u(t)$.

Exercice 2 : 4 points

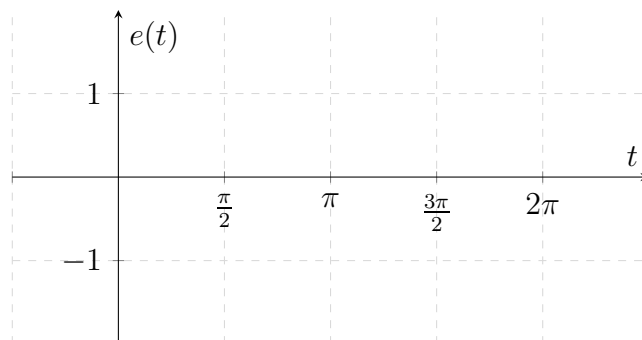
On considère un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $e(t)$ et $s(t)$. On note $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$ liées par la relation

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2 + 1}$$

On souhaite étudier la réponse du système sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $e(t)$ est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $e(t)$.



2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de la fonction u et calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$.

3. En utilisant que $\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$, déterminer l'expression (simplifiée) du signal $s(t)$ lorsque $t \geq 0$.

Exercice 3 : 4 points

1. On souhaite résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle (E)

$$y''(t) + 4y(t) = e^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Déterminer la transformée de Laplace de $y(t)$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 4)(p + 1)}$$

3. Donner l'expression du signal $y(t)$.

Exercice 4 : 10 points

Soit A un réel strictement positif.

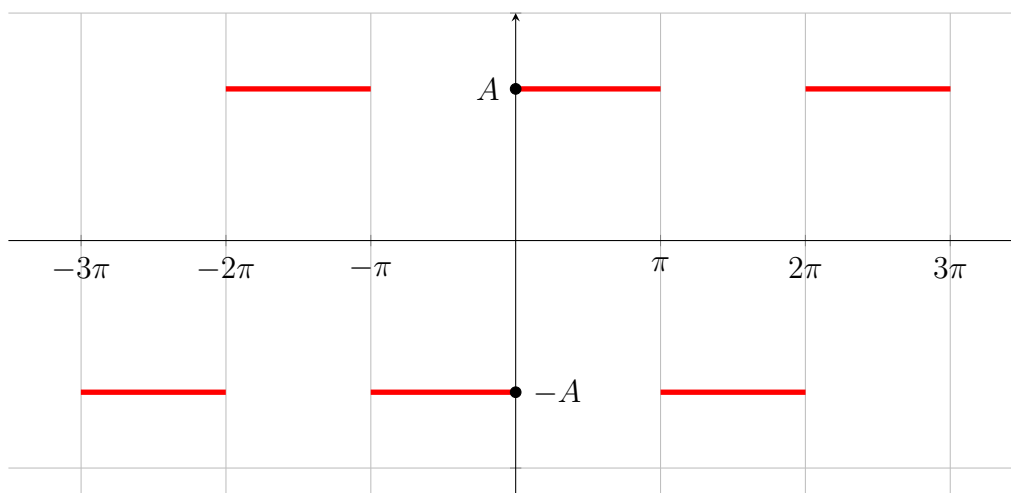
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ -A & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

On pourra assimiler f à une fonction **impaire**.

On convient de noter la décomposition en série de Fourier

$$S\{f\}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$



1.
 - (a) Déterminer la valeur de ω .
 - (b) Déterminer la valeur de a_0 , correspondant à la moyenne de f .
 - (c) Déterminer la valeur des coefficients a_n du développement en série de Fourier.

2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, b_n en fonction de A et n (uniquement).

3. (a) Calculer, en fonction de A , les coefficients b_1 , b_2 , b_3 et b_4 .

- (b) Déterminer la moyenne quadratique f_{eff}^2 de f .

- (c) Déterminer la précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4.

4. Déterminer une forme simplifiée des coefficients b_{2k} pour $k \geq 1$ et b_{2k+1} pour $k \geq 0$.

5. En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Autour des transformées de Laplace

Transformées de Laplace et dérivation :

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{f''\}(p) = p^2\mathcal{L}\{f\}(p) - pf(0) - f'(0).$$

$$\text{Plus généralement, on a : } \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{L}\{f^{(3)}\}(p) = p^3\mathcal{L}\{f\}(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Laplace
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p + a}$
$t f(t) u(t)$	$-\frac{d}{dp}[\mathcal{L}\{f\}](p)$
$f(at) u(t)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{p}{a}\right)$
$e^{-at} f(t) u(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(p + a)$
$f(t - a) u(t - a)$	$e^{-ap}\mathcal{L}\{f\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \frac{1}{1 - e^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\{f\}(p) \times \mathcal{L}\{g\}(p)$