Année universitaire 2024-2025

TD
OUTILS MATHÉMATIQUES ET LOGICIELS

SEMESTRE 2

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :

$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

COMPLÉMENTS SUR LE PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Capacités attendues :
• Calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant différentes formules.
• Déterminer un angle à partir du produit scalaire.
• Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

I Différentes formes du produit scalaire

DÉFINITION 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

PROPRIÉTÉ 1 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.

1. Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique (définie positive). Ainsi :
   - $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
   - $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
   - $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

PROPRIÉTÉ 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration :

Application :
On rapporte le plan au repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Déterminer les produits scalaires suivants :

$\vec{u}.\vec{u} =$

$(2\vec{u}).(3\vec{u}) =$

$\vec{i}.\vec{j} =$

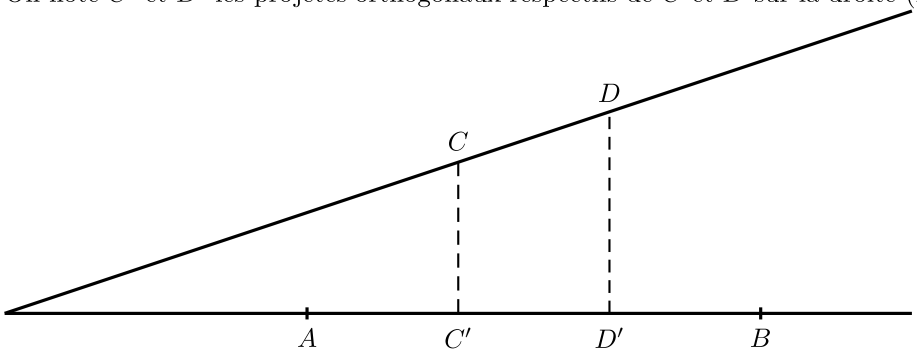
$\vec{i}.\vec{i} =$

• Expression analytique dans un repère orthonormé :
On rapporte le plan au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$. Déterminons le produit scalaire de ces deux vecteurs.

$\vec{u}.\vec{v} =$

PROPRIÉTÉ 3 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

• Expression à l'aide des projections :
On considère quatre points du plan A, B, C et D.
On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).



PROPRIÉTÉ 4 : On considère quatre points du plan A, B, C et D. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB). On a $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

II Propriétés du produit scalaire

PROPRIÉTÉ 5 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

PROPRIÉTÉ 6 : Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

III Exercices

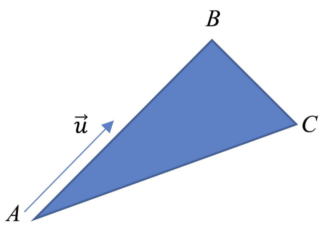
Exercice 1 :

On considère les vecteurs $\vec{u}(2;1)$, $\vec{v}(-2;4)$, $\vec{w}(1;2)$ ainsi que le vecteur $\vec{a}(3;3)$

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$
2. (a) Déterminer $\vec{u}.\vec{v}$ ainsi que $\vec{u}.\vec{w}$.
   (b) Quelle est la norme de $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}(\vec{u}.\vec{w})\,\vec{w}$?
   (c) Simplifier $(\vec{w}.\vec{v})\,\vec{w}$.
   (d) Déterminer une mesure, en degrés, de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{w})$.
3. (a) Déterminer graphiquement des valeurs approchées des coordonnées $(\alpha;\beta)$ de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.
   (b) Déterminer, par calcul, les valeurs de α et β.
4. (a) Déterminer graphiquement des valeurs approchées des coordonnées $(\alpha';\beta')$ de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u};\vec{w})$.
   (b) Déterminer, par calcul, les valeurs de α' et β'.

Exercice 2 :

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 4$ et $BC = 3$.



1. Soit $\vec{u}$ un vecteur colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et de norme 2.
   Calculer $\vec{u}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC}$ (*on pourra décomposer $\overrightarrow{AC}$ en somme de deux vecteurs*).
2. Soit un vecteur $\vec{v}$, de même norme que $\vec{u}$, tel que $(\vec{u},\vec{v}) = -30^{o}$.
   Calculer $\vec{v}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}.\overrightarrow{AC}$

TD 1 : APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues :
- Utiliser les formules d'addition et de duplication en trigonométrie.
- Transformer un signal du type $a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.
- Linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$ pour $n = 2$ et $n = 3$.
- Factoriser un polynôme à coefficients réels.

Trigonométrie

Exercice 1 : ⋆⋆
Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :
$A = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $B = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $C = \cos(x + \pi)$.

Exercice 2 : ⋆⋆
Écrire sous la forme $A\sin(\omega x + \varphi)$ les expressions suivantes :
$A = \sqrt{3}\sin(\omega x) + \cos(\omega x)$ et $B = 2\sin(\omega x) - 2\cos(\omega x)$.

Exercice 3 : ⋆⋆
Linéariser $\cos^2\theta$ ainsi que $\sin^3\theta$.

Exercice 4 : ⋆⋆⋆
Montrer que, pour tous réels a et b, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Factorisation de polynômes

Exercice 5 : ⋆⋆
Soit P le polynôme défini par

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

1. En procédant par identification, déterminer trois réels a, b et c tels que

$$P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

2. À l'aide d'une division euclidienne, déterminer trois réels α, β et γ tels que

$$P = (X-2)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

3. Factoriser, en produit de polynômes irréductibles, P.

Exercice 6 : ⋆
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^2 + 8X + 6 \quad ; \quad Q(X) = -X^2 + 4X - 4 \quad ; \quad R(X) = X^2 - 2X + 2$$

Exercice 7 : ⋆⋆
Déterminer le polynôme P de degré 3, de coefficient dominant 2, admettant pour racines -1 et $2j$.

Exercice 8 : $\star\star$
On considère le polynôme

$$S(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$$

Après avoir déterminé une racine (évidente), factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ce polynôme.

Exercice 9 : $\star\star$
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :
$A(X) = 2X^3 - 16$.
$B(X) = X^4 - X$.
$C(X) = X^3 + X - 2$.

Exercice 10 : $\star\star$
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$R(X) = X^4 - X^3 + X^2 - 11X + 10$$

Exercice 11 : $\star\star\star$
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
$Q(X) = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 + X + 1$
$R(X) = 2X^3 - X^2 - 2X + 6$
Indication pour la dernière factorisation : on pourra calculer $R(1+j)$.

Exercice 12 : $\star\star\star$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^4 - 2X^2\cos\varphi + 1 = 0$ avec $\varphi \in]0;\pi]$.

TD 2 : DÉCOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

Capacités attendues :

- Écrire la forme générale d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$.
- Calculer les coefficients d'éléments de première espèce du type $\dfrac{a}{(X-\lambda)^n}$.
- Calculer les coefficients d'éléments de seconde espèce du type $\dfrac{aX+b}{X^2+\alpha X+\beta}$ avec $\Delta < 0$.

Exercice 1 : $\star$

Dans cet exercice, aucun calcul de coefficient n'est à effectuer.
Écrire la forme générale de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{2}{X^2+3X+2} \quad ; \quad G(X) = \frac{2}{X^3+3X^2} \quad ; \quad H(X) = \frac{2X^2+1}{X^2+X} \quad ; \quad K(X) = \frac{2}{X^3+2X^2+X}.$$

Exercice 2 : $\star\star$

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F(X) = \dfrac{2}{X^2+3X+2}$
- $G(X) = \dfrac{2}{X^3+3X^2}$
- $H(X) = \dfrac{2X^2+1}{X^2+X}$.

Exercice 3 : $\star\star$

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1(X) = \dfrac{3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X}$.
- $F_2(X) = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$.
- $F_3(X) = \dfrac{X^3+2X-1}{X(X-1)}$.
- $F_4(X) = \dfrac{X+2}{X^3-8}$.

Exercice 4 : $\star\star$

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_5(X) = \dfrac{2}{X^2(X-2)}$.
- $F_6(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$.
- $F_7(X) = \dfrac{2X-1}{X^2-3X+2}$.
- $F_8(X) = \dfrac{X^4}{X^2-X-6}$.

Exercice 5 : $\star\star\star$

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F.
On peut donc écrire $Q = (X-\alpha)\widehat{Q}$ avec $\widehat{Q}(\alpha) \neq 0$ ce qui conduit à une décomposition en éléments simples de la forme :
$F = \dfrac{P}{(X-\alpha)\widehat{Q}} = G + \dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ où G est une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle.

1. Montrer que : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{3X-4}{X^2-3X+2}$.
3. On pose $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $n \geqslant 2$.
   Réduire au même dénominateur $F = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{X-\omega_k}$.

TD 3 : INTÉGRATION

Capacités attendues :
• Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
• Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables.
• Calculer des valeurs moyennes et efficaces de signaux.
• Déterminer la nature d'une intégrale impropre. Effectuer un calcul en cas de convergence.

Intégration par parties

Exercice 1 : ⋆⋆
Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x\mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x \quad ; \quad B = \int_1^t x\ln x\ \ \mathrm{d}x \text{ où } t > 0 \quad ; \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)\ \mathrm{d}x.$$

Valeurs moyenne et efficace

Exercice 2 : ⋆⋆
Déterminer les valeurs moyennes et efficaces des signaux ci-dessous :

$$s(t) = 3\sin(\omega t) \text{ et } f(t) = 3\sin(\omega t) + 1$$

Changements de variable

Exercice 3 : ⋆⋆
Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2} \text{ en posant } t = \frac{x}{3} \qquad \text{et} \qquad B = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\ \mathrm{d}x \text{ en posant } y = \ln x.$$

Parité et intégration

Exercice 4 : ⋆⋆⋆
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi'(x)$ ainsi que $\phi(0)$.
2. Montrer que si f est paire alors $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
3. Montrer que si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Exercice 5 : ⋆⋆
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{1-t}{3} \text{ pour tout } t \in \left]0, 1\right].$$

1. Déterminer $f(0)$.
2. Représenter graphiquement cette fonction.
3. Déterminer la valeur moyenne de f.
4. Déterminer la moyenne quadratique de f.

Intégrales généralisées

Exercice 6 : ⋆⋆
Étudier la nature des intégrales suivantes et donner sa valeur si elle converge.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt \quad ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \, dt \quad ; \quad I_3 = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \quad ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \quad ; \quad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

Exercice 7 : ⋆⋆

1. Calculer
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1} \, dt$$
2. On considère l'intégrale
$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} \, dt$$
En posant $x = \sqrt{t}$, calculer cette intégrale.

Pour aller plus loin

Exercice 8 : ⋆⋆⋆

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, dx$.
2. En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \arctan x$, la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{1} \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx$.

Exercice 9 : Suites et intégrales ⋆⋆⋆
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(t)|$.

1. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t) \, dt$.
2. Calculer la valeur de $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(2nt) \, dt$ pour tout entier n non nul.

Exercice 10 : Intégrale de Wallis ⋆⋆⋆
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

1. Montrer que $I_n > 0$ puis que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ (en posant $x = \frac{\pi}{2} - t$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

TD 4 : ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES

Capacités attendues :
• Résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
• Résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
• Rechercher une solution particulière de la même forme que le second membre.

Exercice 1 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du 1^er^ ordre suivantes :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' = -y + 1$ et $y(0) = 1$
3. $y' + 2y = x + 5$
4. $y' + 2y = 2\mathrm{e}^x$.

Exercice 2 : ⋆⋆
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = \cos t$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Donner la solution générale de (E) sous la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + A\sin(\omega t + \varphi)$.
3. Déterminer la ou les solutions de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 3 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y" + 4y' + 5y = 0$
2. $y" - 2y' - 3y = -3$
3. $y" - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 4 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y" + 4y = 10$, sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
2. $y" - 4y' + 5y = 0$.
3. $y" - 4y' + 5y = x$.

Exercice 5 : ⋆⋆

1. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0$ où R et C sont des constantes non nulles.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{qE}{m} = 0$.
   (b) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho v = mg$.
3. Intensité dans un circuit électrique
   (a) Résoudre l'équation différentielle $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$ sachant que $i(0) = 0$ (R, L et Esont des constantes non nulles).
   (b) En déduire la durée t_0 au terme de laquelle $i(t_0) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\infty} i$.

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y" + 4y' + 8y = \sin x$$

Exercice 7 : $\star\star\star$
Déterminer les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0;1]\,, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indication : L'équation différentielle associée est du type $y' + y = D$ ...

Exercice 8 : $\star\star\star$
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + 1$$

Indication : On peut montrer que f est dérivable et déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f ...

TD 5 : TRANSFORMATION DE LAPLACE

Capacités attendues :
- Déterminer, notamment par calcul, la transformée de Laplace d'une fonction.
- Déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fonction.
- Résoudre une équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 1 : ⋆⋆
Représenter les signaux suivants ci-dessous et déterminer, par calcul, la transformée de laplace associée.

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) \quad \text{et} \quad g(t) = u(t) - u(t-2)$$

Exercice 2 : ⋆⋆⋆
Déterminer, par calcul, la transformée de Laplace de la fonction f définie par

$$f(t) = tu(t)$$

Exercice 3 : ⋆⋆⋆
Déterminer le domaine de définition de la fonction F (d'une variable réelle) définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 : ⋆
Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} f : t \mapsto \sin(t)\,u(t) & f_1 : t \mapsto \sin(t)\,u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ f_2 : t \mapsto u(t)\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & f_3 : t \mapsto \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ h : t \mapsto 2t\,[u(t) - u(t-1)] & h_1 : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{3} h(t-k) \end{array}$$

Exercice 5 : ⋆⋆
Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$$\begin{array}{ll} f(t) = [4 + 2\cos(3t)]\,u(t) & g(t) = [5 + 3\sin(3t)]\,u(t) \\ h(t) = \left(2t^3 - 1\right)u(t) & i(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)\sin(3t)\,u(t) \\ j(t) = \left[2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right]u(t) & k(t) = u(t) - u(t-2) \\ l(t) = t\,[u(t) - u(t-2)] & \end{array}$$

Exercice 6 : ⋆⋆
Déterminer, en utilisant deux méthodes (formules), la transformée de Laplace de la fonction définie par :

$$f(t) = \left[te^{-3t}\right]u(t)$$

Exercice 7 : ⋆⋆
Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \frac{\pi}{3} \\ 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & \text{si} \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases} .$$

Exercice 8 : ⋆⋆
Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle F définie par

$$F(p) = \frac{2}{p^2 - 1}$$

Exercice 9 : ⋆⋆
Déterminer la transformée de Laplace inverse des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(p) = \frac{2p+1}{p^2-4p-5} \qquad F_2(p) = \frac{p^2+1}{p^2-p}$$
$$F_3(p) = \frac{p+1}{(p+3)^2} \qquad F_4(p) = \frac{3}{(p^2+2p+3)(p-1)}$$

Exercice 10 : ⋆⋆
En utilisant la transformation de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = u(t)$ avec $y(0) = 0$.
2. $y" + 4y = -6$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.
3. $y' + y = \cos(t)\, u(t)$

Exercice 11 : ⋆⋆
Résoudre, à l'aide de la transformée de Laplace, l'équation différentielle (E) définie sur $[0; +\infty[$
(τ, E_1 et E_2 étant des constantes)

$$(E) \quad \begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = E_2 \\ v(0) = E_1 \end{cases}$$

Exercice 12 : ⋆⋆⋆
Soit $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec N et D deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(N) < \deg(D)$.
On suppose, en outre, que F possède uniquement deux pôles complexes conjugués simples de la forme $\alpha = a \pm jb$.

1. Démontrer que son original est de la forme $f : t \mapsto K\mathrm{e}^{a\,t} \sin(bt + \varphi)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les pôles complexes pour que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

TD 6 : SUITES ET SERIES

Capacités attendues :
- Déterminer la nature d'une suite et sa limite éventuelle.
- Exprimer le terme général d'une suite arithmétique, géométrique.
- Connaître les méthodes de calculs des séries géométriques et télescopiques.
- Déterminer la nature d'une série et sa somme éventuelle.

Calculs de limites - Études de convergence

Exercice 1 : ⋆
Étudier la convergence des suites suivantes définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = \frac{3n-2}{9n^2+2} \quad ; \quad v_n = \frac{2}{4^{n+1}} \quad ; \quad w_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad x_n = n^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad y_n = n\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{3n}}\right)$$

Suites géométriques et arithmétiques

Exercice 2 : ⋆⋆
On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{3^{n+2}}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Quelle est la limite de (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$?

Exercice 3 : ⋆⋆
On note (u_n) la suite définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$.
On note (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 2$.

1. Vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite (u_n).

Séries : Nature et somme

Exercice 4 : ⋆⋆

1. Montrer que la série $\sum \frac{2}{(n-1)n}$ est convergente puis calculer sa somme.
2. Calculer $\sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^n}{3^{n+1}}$ et $\sum\limits_{k\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Règles de d'Alembert et Cauchy

Exercice 5 : ⋆⋆

Dans cet exercice, on va utiliser la notion de factorielle d'un entier définie ci-dessous.

> Soit n un entier naturel. Sa factorielle, notée $n!$, est formellement définie par :
>
> $$n! = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$
>
> Par convention, on pose $0! = 1$.

1. (a) Soit n un entier non nul. Montrer que

$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente.

(c) En utilisant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$$

2. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{x^n}{n!} \ (x>0) \quad ; \quad \sum \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \frac{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}{n^n}. \quad ; \quad \sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$$

$\boxed{\text{Pour aller plus loin}}$

Exercice 6 : $\star\star\star$
Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + jy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 7 : $\star\star\star$
Considérons la suite de terme général $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que, pour tout entier non nul n, $S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$.
2. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la suite (S_n) est divergente.

Exercice 8 : $\star\star\star$ [Intégrales de Wallis]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.
4. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
5. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 9 : $\star\star\star$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer la limite de la suite (I_n).
2. Montrer que $I_n = I_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$.
3. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Exercice 10 : $\star\star\star$

Après en avoir justifié l'existence, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en utilisant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$