Année universitaire 2024-2025
BUT GEII

TD de PROBABILITÉS-STATISTIQUE & MSP

SEMESTRE 5

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :

$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

TD 1 : PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

Exercice 1 : $\star$
On prélève au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

1. A : "on obtient un as".
2. B : "on obtient le roi de cœur".
3. C : "on obtient une carte qui n'est pas un Pique".

Exercice 2 : $\star$
Une petite ville dispose de 25 conseillers municipaux.

1. Parmi ces conseillers, sont élus un maire, un premier adjoint ainsi qu'un deuxième adjoint.
   Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. A la fin de l'élection, toutes les personnes se saluent.
   Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Exercice 3 : $\star\star$
Une université canadienne organise un congrès sur la robotique et se propose d'accueillir 3 étudiants du département GEII de Bordeaux.

1. 5 étudiants de BUT 3 GEII et 3 étudiants de BUT 2 GEII semblent fort motivés mais il n'y a que 3 places.
   On décide donc de les soumettre à un test d'aptitude sur les réseaux.
   Pour rendre ce test anonyme, le responsable propose d'indiquer sur la fiche test, non pas le nom de chaque étudiant mais sa date de naissance (code de 4 chiffres correspondant au jour et au mois de naissance).
   Pour simplifier le dénombrement, on pourra prendre comme référence une année de 365 jours.
   (a) Quelle est la probabilité que tous les étudiants aient un code différent ?
   (b) En déduire la probabilité que des étudiants aient le même code.
2. Les 8 étudiants ayant réussi le test, on décide de procéder à un tirage au sort (3 noms choisis simultanément dans une urne). Déterminer la probabilité que :
   (a) les étudiants choisis soient tous les 3 en BUT 3 GEII ;
   (b) au moins un des étudiants choisis soit en BUT 2 GEII.

Exercice 4 : $\star$
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements A : “ la carte tirée est une dame ” et B : “ la carte tirée est un pique ”.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 5 : $\star\star$
On lance deux dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de l'événement A : “ la somme des numéros est égale à 4 ” ?
2. Cette expérience est répétée 10 fois dans des conditions identiques et indépendantes.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois une somme égale à 4 ?

Exercice 6 : $\star\star$
Le loto est un jeu de la FDJ consistant à choisir 5 numéros dans une grille numérotée de 1 à 49 et 1 numéro de la chance compris entre 1 et 10.

1. Quelle est la probabilité p_6 d'obtenir les 5 bons numéros et le numéro de la chance ?
2. Quelle est la probabilité p_5 d'obtenir les 5 bons numéros sans le numéro de la chance ?
3. Quelle est la probabilité p d'obtenir au moins 1 bon numéro et le numéro de la chance ?

Exercice 7 : $\star\star$
Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
   On le lance une fois :
   si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.
   (c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire simultanément deux boules.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule noire ?

Exercice 8 : $\star\star$
En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois, 40 % des individus sont allés au cinéma et 20 % à un concert.
En outre, 10 % de la population totale sont allés au cinéma et à un concert.
On pourra utiliser les événements :
F : " la personne va au cinéma " et C : " la personne va assister à un concert ".

1. Déterminer $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(F \cap C)$.
2. Calculer la probabilité que, durant un mois, un individu :
   (a) aille au cinéma ou à un concert ;
   (b) aille à un concert mais pas au cinéma ;
   (c) sachant qu'il est allé à un concert, aille au cinéma.
3. Dans un échantillon extrait de cette population, on dénombre 8 étudiants dont 3 femmes.
   (a) Combien peut-on former de binômes ?
   (b) Quelle est la probabilité de choisir un binôme avec deux étudiants du même sexe ?

Exercice 9 : $\star\star\star$
Soient $A_1, \cdots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$$
2. En déduire que la probabilité qu'aucun des évènements A_i ne soit réalisé est inférieure à
$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$$

Exercice 10 : $\star\star\star$
Soient A et B deux évènements. Montrer que :
$$\mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$$
si et seulement si les événements A et B sont indépendants.

TD 2 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1 : $\star$
Une personne possède 4 clefs, parmi lesquelles une seule ouvre sa porte. Elle les essaie au hasard en éliminant toute clef ne convenant pas.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 : $\star$
Soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1; 1; 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = a$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = |X| - X$.
4. En déduire l'espérance de $Z = 2|X| + 1$.

Exercice 3 : $\star$
Une entreprise du secteur électronique fabrique des résistances en grande série.
Une étude statistique a montré que la probabilité qu'une résistance prise au hasard dans la production soit défectueuse est égale à 0,002. Sur une journée, on prélève au hasard 10 résistances.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de résistances défectueuses.

1. (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Déterminer son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que toutes les résistances fonctionnent.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux résistances défectueuses.

Exercice 4 : $\star\star$
On considère une liaison ayant un certain taux d'erreur (par bit transmis) et on décide de transmettre un message de 10 000 bits.

1. On suppose que ce message est transmis avec un taux d'erreur de 10^{-3}.
   Quelle est la probabilité d'avoir au moins un erreur ?
2. Même question en considérant des taux d'erreur égaux à 10^{-4} ; 10^{-5} ; 10^{-7}.
3. Lorsqu'on transmet ce message avec un taux d'erreur de 10^{-3}, quelle est la probabilité d'obtenir 1 erreur ? 2 erreurs ?

Exercice 5 : $\star\star$
Dans le but de contrôler l'ébriété des conducteurs automobiles, la police procède à un Alcootest. On admet que 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété. La police contrôle n personnes.

1. Exprimer, en fonction de n, la probabilité qu'il y ait au moins une personne en état d'ébriété.
2. Calculer le nombre minimal de personnes à contrôler par la police pour que la probabilité qu'au moins une personne soit en état d'ébriété soit supérieure ou égale à 95%.

Exercice 6 : $\star$
On suppose que X est distribuée selon la loi de poisson de paramètre 2.
Calculer $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 9)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Exercice 7 : $\star\star$
Le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 2 par minute.
On admet que la variable X égale au nombre d'appels reçus durant une minute suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer la probabilité que le standard reçoive en une minute :

1. aucun appel ;
2. plus de 3 appels.

Exercice 8 : ⋆⋆⋆
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé, indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ de support $\mathbb{N}^\star$.
On a donc, pour tout entier k non nul :

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \mathbb{P}\left(Y = k\right) = q^{k-1}p$$

1. Exprimer q en fonction de p.
2. Calculer l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
3. On pose $U = \inf(X, Y)$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(U \leq i)$ pour tout entier non nul i.
   (b) En déduire que la variable aléatoire U suit également une loi Géométrique.
   Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 9 : ⋆⋆⋆
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes distribuées suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2.

1. On pose
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
Déterminer l'espérance et la variance de $\bar{X}$.
2. On pose
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$
Déterminer l'espérance de S^2.

Exercice 10 : ⋆⋆⋆
On teste la capacité d'apprentissage de singes. Chaque animal a le choix entre deux portes pour sortir de sa cage.

— S'il essaie la porte A, il reçoit une légère décharge et la porte reste fermée.
— S'il essaie la porte B, il reçoit une friandise et la porte s'ouvre.

On a affaire à deux catégories de singes.

- ceux de la catégorie I sont sans mémoire.
- ceux de la catégorie II apprennent : la probabilité que l'un d'entre eux essaie la porte B à la k-ième tentative après avoir essayé la porte A précédemment est égale à $1 - \frac{1}{k+1}$.

1. Calculer, pour un singe de la catégorie I, puis pour un singe de la catégorie II, la probabilité qu'il sorte exactement à la n-ième tentative.
Calculer alors, pour chaque catégorie de singe, la probabilité qu'il sorte au plus tard à la n-ième tentative.
2. Une population comporte 60 % de singes de la catégorie I et 40 % de singes de la catégorie II.
Calculer la probabilité qu'il soit de la catégorie II, sachant qu'il a réussi à sortir exactement à la n-ième tentative.

TD 3 : VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Exercice 1 : $\star$
La densité de probabilité f de la loi uniforme sur $[a;b]$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On note X une variable aléatoire distribuée suivant la loi uniforme sur $[a;b]$.
   Montrer que l'espérance de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_X de la variable X.
   Représenter graphiquement cette fonction.
3. En utilisant la fonction de répartition F_X, montrer que, si $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ alors
   $$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$
4. On considère désormais que le temps d'attente à un guichet de gare, exprimé en minutes, est une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[a;b]$.
   (a) Déterminer les valeurs a et b telles que :
   - Le temps d'attente moyen est de 5 minutes.
   - 40 % des voyageurs ont un temps d'attente supérieur à 6 minutes.

   (b) Quel est le temps maximal d'attente ?

Exercice 2 : $\star\star$
La loi de Cauchy, appelée aussi loi de Lorentz, est une loi de probabilité classique qui doit son nom au mathématicien Augustin Louis Cauchy. Une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy admet une densité f définie par :

$$f(x) = \frac{K}{x^2+1}$$

1. Déterminer la valeur de K afin que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X et représenter cette fonction.
3. X admet-elle une espérance ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X > 1)$.

Exercice 3 : $\star\star$
On considère une variable aléatoire X de densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geq 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de c.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. X admet-elle une espérance ?

Exercice 4 : $\star$
On suppose que la variable aléatoire X est distribuée suivant la loi normale de paramètres 20 et 5.
Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leq 28) \qquad \mathbb{P}(X \geq 25) \qquad \mathbb{P}(X \geq 12) \qquad \mathbb{P}(X < 10) \qquad \mathbb{P}(15 \leq X \leq 25)$$

Exercice 5 : $\star\star$
On admet que la masse des œufs de poule en grammes d'une race donnée est une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale de moyenne 60 et d'écart-type 4.
On prélève dans cette population un œuf au hasard.

1. Calculer la probabilité que la masse de cet œuf soit supérieure à 55 grammes ?
2. Calculer la probabilité que la masse de cet œuf soit comprise entre 54 grammes et 63 grammes.
3. On souhaite éliminer 5% des œufs les plus légers.
   Quelle est la masse minimale d'un œuf non éliminé ?

Exercice 6 : $\star\star$
On suppose que la variable X est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(10;\sigma)$.
Déterminer la valeur de σ sachant que $\mathbb{P}(X < 15,2) = 0,99$.

Exercice 7 : $\star\star$
Une machine fabrique des résistances chauffantes en grande série. On admet que la variable aléatoire X égale à la longueur, en mm, d'une résistance est distribuée suivant une loi normale de moyenne 400 et d'écart-type σ.
Une pièce est déclarée acceptable si sa longueur est comprise entre 392,5 et 407,5 mm.

1. Sachant que $\sigma = 5$, déterminer le pourcentage de pièces défectueuses dans la production.
2. Quelle serait la valeur de σ si 10% des pièces étaient défectueuses ?

Exercice 8 : $\star\star$
La durée de vie X d'un écran LED, exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ . On admet, qu'en moyenne, un écran LED a une durée de vie de 8 ans.

1. Déterminer la probabilité qu'un écran, pris au hasard, ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
2. Si vous possédez un écran depuis 2 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ? Que remarquez-vous ?

Exercice 9 : (d'après concours ENSEA)$\star\star\star$
Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants, on constate que la résistance nominale en ohms de chaque composant tiré au hasard est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(1000;10)$.
Pour cet exercice, on se contentera d'utiliser les 3 résultats suivants :

$$\mathbb{P}(-1,96 < U < 1,96) = 0,95 \quad ; \quad \mathbb{P}(-1,64 < U < 1,64) = 0,9 \quad ; \quad P(U < 1) = 0,84$$

Première partie :

1. La probabilité que la résistance d'un composant tiré soit entre 980 Ω et 1020 Ω est-elle supérieure à 0,95 ?
2. La probabilité que la résistance d'un composant tiré soit entre 991 Ω et 1009 Ω est-elle supérieure à 0,9 ?
3. La probabilité que la résistance d'un composant tiré soit supérieure à 983,6 Ω est-elle supérieure à 0,97 ?
4. La probabilité que la résistance d'un composant tiré soit entre 990 Ω et 1010 Ω est-elle égale à 0,84 ?
5. La probabilité que la résistance d'un composant tiré soit entre 983,6 Ω et 1019,6 Ω est-elle égale à 0,925 ?

Deuxième partie :
On fait un tirage indépendant de 100 résistances et on calcule la résistance moyenne Z des résistances $X_1, \cdots, X_{100}$.
On a donc :

$$Z = \frac{X1 + \cdots + X_{100}}{100}$$

1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z ainsi que son écart-type.
2. On admet que la loi de Z est une loi normale.
   La probabilité que Z soit entre 998 Ω et 1002 Ω est-elle supérieure à 0,95 ?

Exercice 10 : $\star\star\star$
Soit X une variable aléatoire de loi Exponentielle de paramètre λ.
Quelle est la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X) ?
On déterminera $\mathbb{P}(X = k)$ *pour tout entier* $k \in Y(\Omega)$.

Exercice 11 : $\star\star\star$
On considère une variable U distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de U.
2. Déterminer la loi de U^2 ainsi que son espérance.

TD 4 : ESTIMATION-TESTS

Exercice 1 : $\star\star$
On joue à la roulette de la façon suivante :
On mise 1 euro sur un seul numéro compris entre 0 et 36.
Si ce numéro sort à la roulette, on gagne 35 euros, sinon la banque (propriétaire de la roulette) garde la mise.
L'objectif est de déterminer, lorsque 5000 personnes jouent, la probabilité que la banque perde de l'argent.

1. On note X_i la variable aléatoire égale au gain du i-ième joueur.
   Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. On pose $X = \sum_{i=1}^{5000} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de X.
   (b) Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ?
   (c) Conclure.

Exercice 2 : $\star\star$
Le département qualité d'une production en grande série de circuits électroniques a évalué à 3% le nombre de circuits non valides.
Un client reçoit un lot de 500 circuits.

1. En utilisant le TCL, déterminer la probabilité qu'il reçoive au plus 1% de circuits non valides dans son lot.
2. Par contrat, le client peut renvoyer le lot si celui-ci comporte plus de 5% de circuits non valides. Quelle est la probabilité qu'il soit conduit à renvoyer le lot ?

Exercice 3 : $\star\star$
Une entreprise pharmaceutique produit des comprimés à l'aide de machines dont elle souhaite contrôler les performances. On admet que les distributions de masse sont normales.
Le responsable de production dans cette entreprise souhaite obtenir une estimation du poids moyen μ des comprimés produits.

1. On réalise une pesée manuelle sur un échantillon de 30 comprimés choisis aléatoirement.
   On admet par ailleurs que l'écart-type du poids des comprimés (fourni par le fabricant de la machine) : $\sigma = 5$ mg.
   Les valeurs de pesée obtenues, exprimées en mg, sont les suivantes :

190	193	178	191	194	193	191	196	189	192	195	194	195	190	194
179	194	191	193	192	194	197	189	180	193	193	189	187	194	196.

   (a) Donner une estimation ponctuelle du poids moyen des comprimés de la production.
   (b) Donner une estimation du poids moyen des comprimés de la production par intervalle de confiance à 95%.
2. Une incertitude de $\pm$ 3 mg est largement suffisante pour les prochaines mesures.
   Quelle taille d'échantillon proposeriez-vous d'utiliser ?

Exercice 4 : $\star\star$
Une machine fabrique des jetons circulaires dont le diamètre est distribué suivant une loi normale.
On prélève un échantillon de 10 jetons sur lequel on observe un diamètre moyen de 40 mm et un écart-type de 1 mm.

1. Déterminer une estimation ponctuelle du diamètre moyen et de la variance des jetons de la production.
2. Déterminer une estimation du diamètre moyen des jetons de la production, par intervalle de confiance à 95%.

Exercice 5 : ⋆⋆
Une entreprise agro-alimentaire produit des yaourts allégés dont la valeur énergétique étiquetée est de 60 Kilocalories. La répression des fraudes souhaite vérifier la validité de ce chiffre. Elle prélève un échantillon aléatoire simple de 13 yaourts dans la fabrication.
On obtient les résultats suivants :

$$60,4 \quad 62,2 \quad 61,1 \quad 59,6 \quad 62 \quad 60,1 \quad 61,2 \quad 59,4 \quad 60,4 \quad 58,9 \quad 59,1 \quad 61,3 \quad 61,1$$

On suppose que la variable aléatoire X, valeur énergétique exprimée en kcal d'un yaourt prélevé au hasard dans cette fabrication, est distribuée selon la loi normale de moyenne μ et d'écart-type connu σ égal à 1.
Au vu de ces résultats, doit-on considérer que la valeur énergétique moyenne des yaourts de cette fabrication est supérieure à 60 kcal ?

Exercice 6 : ⋆⋆
Une machine calibre des tomates avec une valeur cible de 150 grammes.
On admet que la variable aléatoire Y égale à la masse, en grammes, d'une tomate prise au hasard, est distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(m; 10)$.
Ces tomates sont mises dans des filets contenant 9 tomates.
On admet que la masse d'un filet est négligeable.

1. Justifier que la variable X égale à la masse d'un filet de 9 tomates, en grammes, est distribuée suivant une loi normale d'écart-type égal à 30.
2. Lors d'un contrôle qualité, un distributeur a prélevé un échantillon de 25 filets de 9 tomates et a relevé une masse moyenne de 1339 grammes.
   En utilisant un test unilatéral, peut-on considérer que la masse moyenne des filets de la production est égale à 1350 grammes ?

Exercice 7 : [Estimation de proportions] ⋆⋆
Cet exercice traite de l'estimation de proportions avec une application autour des intentions de vote pour des candidats.
On note p la proportion d'individus présentant un caractère qualitatif dans une population et f la proportion observée sur un échantillon de taille n.

1. On considère des sondages effectués sur 1112 personnes.
   Au deuxième tour d'une élection présidentielle, le dernier sondage de l'institut A indique 52,5 % d'intentions de vote pour le candidat X et 47,5 % pour le candidat Y (les abstentions ou les votes nuls ne sont pas pris en compte).
   L'institut B indique 50,5 % d'intentions de vote pour le candidat X et 49,5 % pour le candidat Y.
   Y a-t-il une contradiction entre les résultats de ces deux instituts de sondage ?
2. Montrer que :
$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right] \subset \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
   On pourra remarquer que lorsque n est grand et f proche de $0,5$, les deux intervalles sont "voisins".

TD 5 : FIABILITÉ

Exercice 1 : $\star\star$

Partie A

Une machine est constituée de deux composants électroniques identiques dont les durées de vie respectives T_1 et T_2 (exprimées en jours) sont des variables aléatoires (indépendantes) suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On admet l'indépendance des pannes des deux composants et on note T la variable aléatoire égale à la durée de vie, en jours, de la machine.

1. On suppose que le montage des deux composants est fait en série.
   Pour que la machine fonctionne, les deux composants doivent être fonctionnels simultanément.
   (a) Pour tout réel t positif, déterminer $\mathbb{P}(T \geq t)$.
   (b) En déduire la loi de T.
   (c) Quelle est la durée de vie moyenne d'une telle machine ?
2. On suppose désormais que le montage des deux composants est fait en parallèle.
   Il est à noter que seules les pannes simultanées des deux composants impactent le fonctionnement de la machine.
   (a) Pour tout réel t positif, déterminer $\mathbb{P}(T \leq t)$.
   (b) $\star\star\star$
   Quelle est la durée de vie moyenne d'une telle machine ?

Partie B

On considère un autre type de composants électroniques dont la durée de vie, en années, X est distribuée suivant une loi normale d'écart-type $\sigma = 0,5$ an.
Sur un échantillon de 16 composants, on a observé une durée de vie moyenne de 9 ans et 9 mois.

Peut-on considérer que la durée de vie moyenne des composants de cette production est inférieure à 10 ans ?

Annexe 1 : Table de la loi **normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Phi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Annexe 2 : Table des **lois de Student**

Loi de Student avec k degrés de liberté
Quantiles d'ordre $1-\gamma$

k	γ = 0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291