Semestre 3 — 7 Novembre 2024

TEST 1 DE MATHÉMATIQUES (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits. Durée : 1,5 heure

NOM, PRENOM, GROUPE : ....

Exercice 1 : 2 points

1. Déterminer la transformée de Laplace du signal $f : t \mapsto (t+2)u(t)$.

2. Déterminer la transformée de Laplace du signal $g : t \mapsto \cos(2t)\mathrm{e}^{-t}u(t)$.

Exercice 2 : 4 points

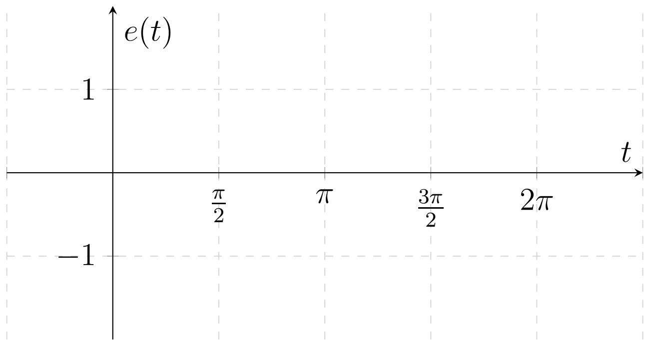
On considère un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $e(t)$ et $s(t)$. On note $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$ liées par la relation

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2+1}$$

On souhaite étudier la réponse du système sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $e(t)$ est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $e(t)$.



2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de la fonction u et calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$.

3. En utilisant que $\dfrac{1}{p(p^2+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}$, déterminer l'expression (simplifiée) du signal $s(t)$ lorsque $t \geq 0$.

<u>Exercice 3 :</u> 4 points

1. On souhaite résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle (E)

$$y''(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

   Déterminer la transformée de Laplace de $y(t)$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 4)(p + 1)}$$

3. Donner l'expression du signal $y(t)$.

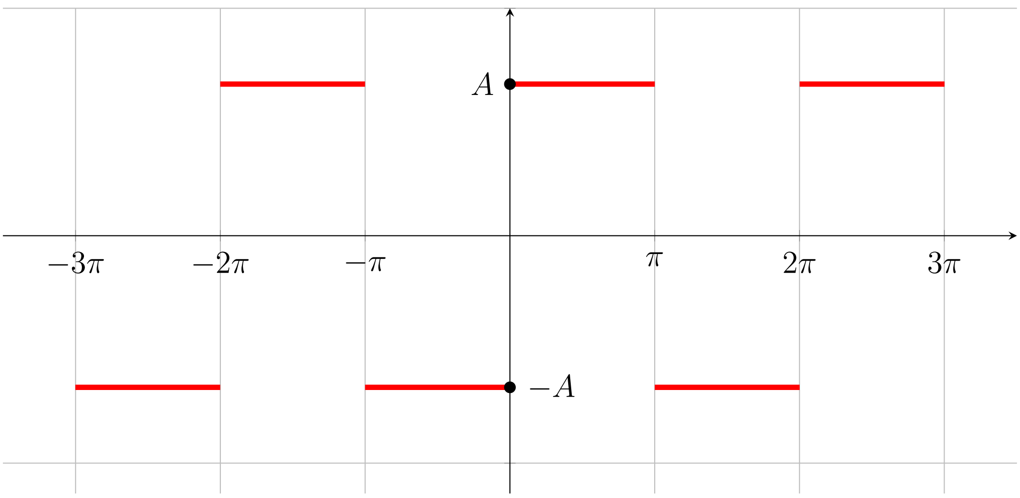
Exercice 4 : 10 points

Soit A un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ -A & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

On pourra assimiler f à une fonction **impaire**.
On convient de noter la décomposition en série de Fourier

$$S\{f\}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$



1. (a) Déterminer la valeur de ω.
   (b) Déterminer la valeur de a_0, correspondant à la moyenne de f.
   (c) Déterminer la valeur des coefficients a_n du développement en série de Fourier.

2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, b_n en fonction de A et n (uniquement).

3. (a) Calculer, en fonction de A, les coefficients b_1, b_2, b_3 et b_4.

(b) Déterminer la moyenne quadratique f_{eff}^2 de f.

(c) Déterminer la précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4.

4. Déterminer une forme simplifiée des coefficients b_{2k} pour $k \geq 1$ et b_{2k+1} pour $k \geq 0$.

5. En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Autour des transformées de Laplace

Transformées de Laplace et dérivation :

$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(p) = p\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - f(0)$.

$\mathcal{L}\left\{f''\right\}(p) = p^2\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - pf(0) - f'(0)$.

Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - p^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.

Ainsi : $\mathcal{L}\left\{f^{(3)}\right\}(p) = p^3\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	**Expression de la transformée de Laplace**
$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n\, u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\, u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$t\, f(t)\, u(t)$	$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\left\{f\right\}](p)$
$f(at)\ u(t)$	$\dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\right\}\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\ f(t)\ u(t)$	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p+a)$
$f(t-a)\, u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-a\,p}\mathcal{L}\left\{f\right\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) \times \mathcal{L}\left\{g\right\}(p)$

Semestre 3	7 Novembre 2024

CORRECTION TEST 1 DE MATHÉMATIQUES (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits. Durée : 1,5 heure

Exercice 1 : 2 points

1. Déterminer la transformée de Laplace du signal $f : t \mapsto (t+2)u(t)$.

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{1+2p}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

2. Déterminer la transformée de Laplace du signal $g : t \mapsto \cos(2t)\mathrm{e}^{-t}u(t)$.

$$\mathcal{L}\{g\}(p) = \mathcal{L}\{\cos(2t)u(t)\}(p+1) = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{p^2+2p+5}$$

Exercice 2 : 4 points

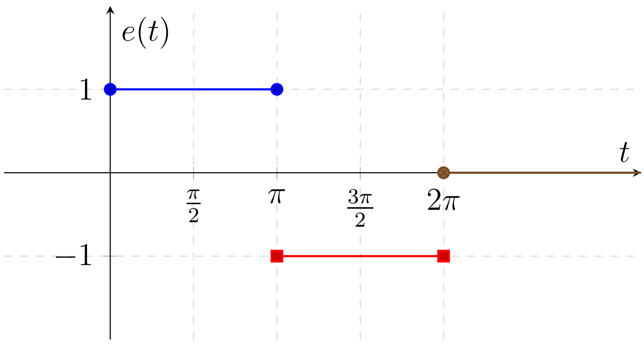
On considère un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $e(t)$ et $s(t)$. On note $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$ liées par la relation

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2+1}$$

On souhaite étudier la réponse du système sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $e(t)$ est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $e(t)$.



2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de la fonction u et calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$.

$$e(t) = u(t) - u(t-\pi) - (u(t-\pi) - u(t-2\pi)) = u(t) - 2u(t-\pi) + u(t-2\pi)$$

$$E(p) = \frac{1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}}{p} = \frac{(1 - e^{-p\pi})^2}{p}$$

3. En utilisant que $\dfrac{1}{p(p^2+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}$, déterminer l'expression (simplifiée) du signal $s(t)$ lorsque $t \geq 0$.

$S(p) = \dfrac{E(p)}{p^2+1}$ donc $S(p) = \dfrac{1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}}{p(p^2+1)} = (1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi})\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}\right)$.
Ainsi
$s(t) = (1 - \cos(t))\,u(t) - 2\,(1 - \cos(t-\pi))\,u(t-\pi) + (1 - \cos(t-2\pi))\,u(t-2\pi)$
$s(t) = (1 - \cos(t))\,u(t) - 2\,(1 + \cos(t))\,u(t-\pi) + (1 - \cos(t))\,u(t-2\pi)$
Il en résulte que

$$s(t) = u(t) - 2u(t-\pi) + u(t-2\pi) - [u(t) + 2u(t-\pi) + u(t-2\pi)]\cos(t)$$

Exercice 3 : 4 points

1. On souhaite résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle (E)

$$y''(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Déterminer la transformée de Laplace de $y(t)$.

> $p^2\mathcal{L}\{y(t)\}(p) - p + 4\mathcal{L}\{y(t)\}(p) = \dfrac{1}{p+1}$ soit $(p^2+4)\mathcal{L}\{y(t)\}(p) = p + \dfrac{1}{p+1}$ Ainsi, on a
>
> $$\mathcal{L}\{y(t)\}(p) = \frac{p^2+p+1}{(p^2+4)(p+1)}$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y(p) = \frac{p^2+p+1}{(p^2+4)(p+1)}$$

> $Y(p) = \dfrac{p^2+p+1}{(p^2+4)(p+1)} = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{bp+c}{p^2+4}$
>
> $a = \dfrac{1}{5}$
>
> En considérant $\lim pY(p)$, on a : $a + b = 1$ donc $b = \dfrac{4}{5}$
>
> En considérant $Y(0)$, il vient : $\dfrac{1}{4} = a + \dfrac{c}{4}$ soit $c = 1 - 4a = \dfrac{1}{5}$. Ainsi
>
> $$Y(p) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{4p+1}{p^2+4}\right)$$

3. Donner l'expression du signal $y(t)$.

> Il résulte de la question précédente que
>
> $$y(t) = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-t} + 4\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)u(t)$$

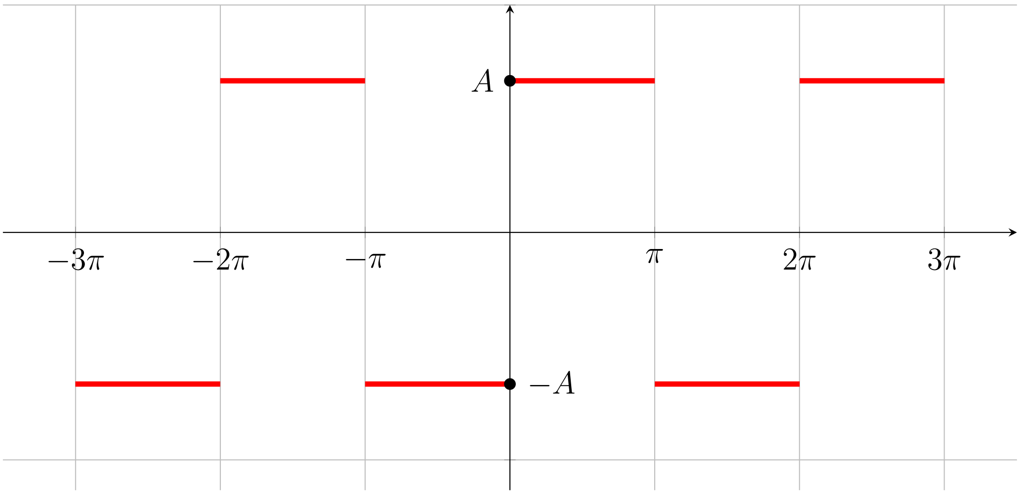
Exercice 4 : 10 points

Soit A un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ -A & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

On pourra assimiler f à une fonction **impaire**.
On convient de noter la décomposition en série de Fourier

$$S\{f\}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$



1. (a) Déterminer la valeur de ω.

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

(b) Déterminer la valeur de a_0, correspondant à la moyenne de f.

f est assimilée à une fonction impaire donc $a_0 = 0$.

(c) Déterminer la valeur des coefficients a_n du développement en série de Fourier.

f est assimilée à une fonction impaire donc, pour tout entier n non nul, $a_n = 0$.

2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, b_n en fonction de A et n (uniquement).

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\pi} A\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2A}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$.

3. (a) Calculer, en fonction de A, les coefficients b_1, b_2, b_3 et b_4.

$b_1 = \dfrac{4A}{\pi}$; $b_2 = 0$; $b_3 = \dfrac{4A}{3\pi}$; $b_4 = 0$.

(b) Déterminer la moyenne quadratique f_{eff}^2 de f.

$f^2 = A^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $< f^2 >= A^2$.

(c) Déterminer la précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4.

La précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4 est donnée par $P_4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\dfrac{4A}{\pi}\right)^2 + \left(\dfrac{4A}{3\pi}\right)^2}{A^2} = \dfrac{80}{9\pi^2} \simeq 0,9$

4. Déterminer une forme simplifiée des coefficients b_{2k} pour $k \geq 1$ et b_{2k+1} pour $k \geq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = \dfrac{2A}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$ donc
- $b_{2k} = 0$ pour $k \geq 1$
- $b_{2k+1} = \dfrac{4A}{(2k+1)\pi}$ pour $k \geq 0$.

5. En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'après la relation de bessel-Parseval, on a :
$A^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} {b_{2k+1}}^2$ soit $A^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{4A}{(2k+1)\pi}\right)^2$ ce qui conduit à la l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$