

CORRECTION TEST 1 DE MATHÉMATIQUES (OML)

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits.

Durée : 1,5 heure

Exercice 1 : 2 points

1. Déterminer la transformée de Laplace du signal $f : t \mapsto (t + 2)u(t)$.

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{1 + 2p}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

2. Déterminer la transformée de Laplace du signal $g : t \mapsto \cos(2t)e^{-t}u(t)$.

$$\mathcal{L}\{g\}(p) = \mathcal{L}\{\cos(2t)u(t)\}(p + 1) = \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 4} = \frac{p + 1}{p^2 + 2p + 5}$$

Exercice 2 : 4 points

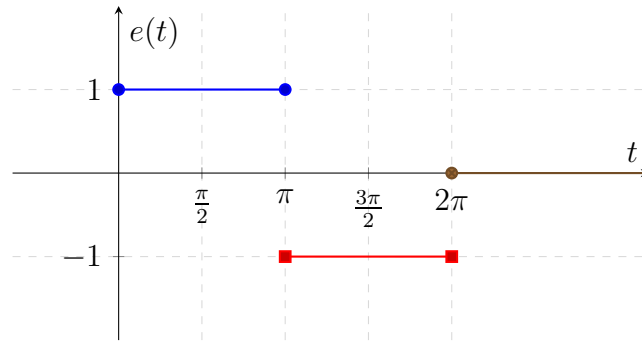
On considère un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $e(t)$ et $s(t)$. On note $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$ liées par la relation

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2 + 1}$$

On souhaite étudier la réponse du système sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $e(t)$ est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $e(t)$.



2. Exprimer $e(t)$ à l'aide de la fonction u et calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de $e(t)$.

$$e(t) = u(t) - u(t - \pi) - (u(t - \pi) - u(t - 2\pi)) = u(t) - 2u(t - \pi) + u(t - 2\pi)$$

$$E(p) = \frac{1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}}{p} = \frac{(1 - e^{-p\pi})^2}{p}$$

3. En utilisant que $\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$, déterminer l'expression (simplifiée) du signal $s(t)$ lorsque $t \geq 0$.

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2 + 1} \text{ donc } S(p) = \frac{1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}}{p(p^2 + 1)} = (1 - 2e^{-p\pi} + e^{-2p\pi}) \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right).$$

Ainsi

$$s(t) = (1 - \cos(t)) u(t) - 2(1 - \cos(t - \pi)) u(t - \pi) + (1 - \cos(t - 2\pi)) u(t - 2\pi)$$

$$s(t) = (1 - \cos(t)) u(t) - 2(1 + \cos(t)) u(t - \pi) + (1 - \cos(t)) u(t - 2\pi)$$

Il en résulte que

$$s(t) = u(t) - 2u(t - \pi) + u(t - 2\pi) - [u(t) + 2u(t - \pi) + u(t - 2\pi)] \cos(t)$$

Exercice 3 : 4 points

1. On souhaite résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle (E)

$$y''(t) + 4y(t) = e^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Déterminer la transformée de Laplace de $y(t)$.

$$p^2 \mathcal{L}\{y(t)\}(p) - p + 4 \mathcal{L}\{y(t)\}(p) = \frac{1}{p+1} \text{ soit } (p^2 + 4) \mathcal{L}\{y(t)\}(p) = p + \frac{1}{p+1} \text{ Ainsi, on a}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 4)(p + 1)}$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 4)(p + 1)}$$

$$Y(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 4)(p + 1)} = \frac{a}{p + 1} + \frac{bp + c}{p^2 + 4}$$

$$a = \frac{1}{5}$$

En considérant $\lim pY(p)$, on a : $a + b = 1$ donc $b = \frac{4}{5}$

En considérant $Y(0)$, il vient : $\frac{1}{4} = a + \frac{c}{4}$ soit $c = 1 - 4a = \frac{1}{5}$. Ainsi

$$Y(p) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p + 1} + \frac{4p + 1}{p^2 + 4} \right)$$

3. Donner l'expression du signal $y(t)$.

Il résulte de la question précédente que

$$y(t) = \frac{1}{5} \left(e^{-t} + 4 \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) u(t)$$

Exercice 4 : 10 points

Soit A un réel strictement positif.

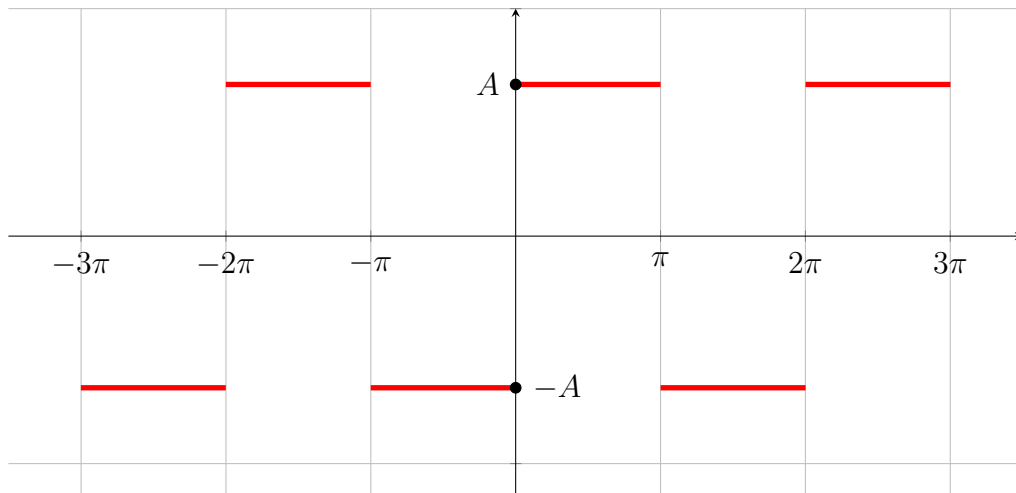
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ -A & \text{si } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

On pourra assimiler f à une fonction **impaire**.

On convient de noter la décomposition en série de Fourier

$$S\{f\}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$



1. (a) Déterminer la valeur de ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

- (b) Déterminer la valeur de a_0 , correspondant à la moyenne de f .

f est assimilée à une fonction impaire donc $a_0 = 0$.

- (c) Déterminer la valeur des coefficients a_n du développement en série de Fourier.

f est assimilée à une fonction impaire donc, pour tout entier n non nul, $a_n = 0$.

2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, b_n en fonction de A et n (uniquement).

$$\text{Pour tout } n \geq 1, b_n = \frac{4}{T} \int_0^\pi A \sin(nt) dt = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

3. (a) Calculer, en fonction de A , les coefficients b_1, b_2, b_3 et b_4 .

$$b_1 = \frac{4A}{\pi}; b_2 = 0; b_3 = \frac{4A}{3\pi}; b_4 = 0.$$

- (b) Déterminer la moyenne quadratique f_{eff}^2 de f .

$$f^2 = A^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc } \langle f^2 \rangle = A^2.$$

- (c) Déterminer la précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4.

La précision de l'approximation de f par la série de Fourier (tronquée) d'ordre 4 est donnée par $P_4 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{4A}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4A}{3\pi}\right)^2}{A^2} = \frac{80}{9\pi^2} \simeq 0,9$

4. Déterminer une forme simplifiée des coefficients b_{2k} pour $k \geq 1$ et b_{2k+1} pour $k \geq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$ donc

- $b_{2k} = 0$ pour $k \geq 1$
- $b_{2k+1} = \frac{4A}{(2k+1)\pi}$ pour $k \geq 0$.

5. En utilisant l'égalité de Bessel-Parseval, calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'après la relation de Bessel-Parseval, on a :

$$A^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}^2 \text{ soit } A^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4A}{(2k+1)\pi} \right)^2 \text{ ce qui conduit à l'égalité suivante}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$