

Contrôle de connaissances 2 - Mathématiques - Mai 2025

Équations différentielles - Calcul intégral - Transformée de Laplace

Vous serez interrogés prochainement en TD (date à voir avec votre enseignant de TD) sur 5 questions parmi les 10 suivantes.

À noter que les résultats suivants seront rappelés :

- $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(p) = e^{-ap}\mathcal{L}\{f(t)u(t)\}(p)$
- $\mathcal{L}\{u(t)\}(p) = \frac{1}{p}$ et $\mathcal{L}\{t^n u(t)\}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}(p) = \frac{1}{p+a}$
- $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u(t)\}(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\}(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

1. Résoudre, sans utiliser la transformée de Laplace, l'équation différentielle

$$y' + 2y = x + 5$$

2. Résoudre, sans utiliser la transformée de Laplace, l'équation différentielle

$$y' + 2y = 2e^x$$

3. Résoudre, sans utiliser la transformée de Laplace, l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 10$$

sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4. Résoudre, sans utiliser la transformée de Laplace, l'équation différentielle

$$y'' - 2y' - 3y = -3$$

5. On considère

$$f(t) = e^{-t}u(t)$$

Représenter ce signal et déterminer, par calcul intégral, sa transformée de Laplace associée.

6. On considère

$$g(t) = u(t) - u(t - 2)$$

Représenter ce signal et déterminer, par calcul intégral, sa transformée de Laplace associée.

7. Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle F définie par

$$F(p) = \frac{2}{p^2 - 1}$$

8. Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle G définie par

$$G(p) = \frac{2p + 1}{p^2 - 4p - 5}$$

9. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction définie par

$$j(t) = 2 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) u(t)$$

10. Déterminer, sans calcul intégral, la transformée de Laplace de la fonction définie par

$$k(t) = u(t) - u(t - 2)$$