

PLANS D'EXPERIENCES
Design Of Experiments (DOE)

Master
Nutrition et sciences des aliments

2024-2025



université
BORDEAUX

SOMMAIRE

- Objectifs / Introduction
- Démarche expérimentale par plans d'expériences
- Plans factoriels complets
- Modèle et Optimisation
- Effet bloc
- Plans factoriels fractionnaires
- Plans fractionnaires complémentaires

- Enseignement de 10 h
 - Cours et TD-TP intégrés
 - Traitement des données avec le logiciel R (Rstudio)
<http://beginr.u-bordeaux.fr/>
 - Évaluation le 11 Octobre 2024

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 2

2

université
BORDEAUX

OBJECTIFS

- Plans d'expériences
 - Outil d'optimisation de l'expérimentation

- Objectifs du cours
 - Mettre en œuvre des plans « simples »
 - Comprendre et poursuivre une étude déjà en cours
 - Exploiter des résultats

- Pré-requis
 - Statistique descriptive et inférentielle
 - Logiciel R

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 3

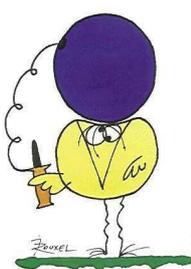
3

Université
BORDEAUX

INTRODUCTION

- Pourquoi faire des expériences ?
 - Pour améliorer les performances
- Méthodologie de la recherche expérimentale

Les devises Shadok



En essayant continuellement on finit par réussir. Donc, plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

Meilleurs délais



A moindre coût



Meilleures informations



Réflexion importante
fragmentation
séquentialité



Organisation optimale des essais

- Nécessité de structurer la démarche

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

4

4

Université
BORDEAUX

RAPPELS - VOCABULAIRE

- Quantification de la **variabilité expérimentale**
 - Comment évaluer la qualité de la mesure obtenue ?
 - étendue
 - Variance empirique et estimée
- **Facteur** : variable qui est supposé avoir une influence sur le phénomène étudié
 - Qualitative ou quantitative
- **Niveaux d'un facteur (ou modalité)** :
Valeurs que prend le facteur au cours des expérimentations (codé sous la forme $-\alpha$; -1; 0; +1; $+\alpha$)
On prend en général comme bornes les limites inférieures et supérieures du domaine
- **Réponse** :
Résultat (mesure) expérimental d'une expérience (quantitatif ou qualitatif)

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

5

5

université
BORDEAUX

DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE PAR PLANS D'EXPÉRIENCES

1. Prise en compte de la problématique 
2. Construction du plan 
3. Préparation et réalisation des essais 
4. Analyse des résultats 
5. Validation de la solution 
6. Conclusions 

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

6

6

université
BORDEAUX

Mise en place d'un plan d'expériences

Réfléchir avant d'agir

- Définir le problème
- Définir l'objectif du plan (plusieurs objectifs possibles = plusieurs stratégies distinctes)
 - Screening : quels facteurs ont une influence ?
 - Quantifier les effets des facteurs
 - ❖ Plan factoriel fractionnaire
 - Optimiser un process
 - ❖ Plan factoriel complet
 - Modéliser un process
 - ❖ Plan composite centré
 - Améliorer la robustesse d'un process (moins de variabilité)

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

7

7

université
BORDEAUX



- Recenser les contraintes (homme, matériel...)
 - => nombre maximal d'essais admissibles
- Définir la.les **réponse.s** à étudier
 - Caractéristique de l'étude
 - Quantitative
 - Économique, rapide, facile à mesurer
 - Précise
- Définir les **facteurs**
 - => Bonne connaissance du problème
 - Recenser les facteurs
 - Classer les facteurs
 - ❖ Contrôlables / provoqués
 - ❖ Non contrôlables (bruit)
 - Sélectionner les facteurs à retenir

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

8

8

université
BORDEAUX



- Définir les modalités ou **niveaux** des facteurs
 - Facteurs qualitatifs
 - ❖ Choix du nombre de modalités
 - Facteurs quantitatifs
 - ❖ Choix du nombre de niveaux / Choix des valeurs prises à chaque niveau (type de progression ?)
- Définir les correspondances niveaux **centrés-réduits** / niveaux réels des facteurs quantitatifs

$$X = \frac{U - U_0}{\Delta U}$$

Exemple : Valeurs U (niveaux) : 100 ; 150 ; 200
 U_0 (moyenne) = 150
 $\Delta U = 50$
 $X = \frac{U - U_0}{\Delta U}$ prend pour valeurs : -1 ; 0 ; 1

X	U	U_0	ΔU
niveau centré-réduit -1 / 0 / +1 / - α / + α	niveau réel	niveau réel au centre du domaine	variation de niveau réel correspondant à une variation de 1 unité centrée réduite

9

Université
BORDEAUX

- Terminologie
 - **Domaine expérimental** : espace dans lequel varient les facteurs (dépend des contraintes expérimentales, techniques, économiques ...)
- Les différents types de plan d'expériences
 - **Plans factoriels complets**
 - **Plans factoriels fractionnaires**
 - *Plans de Plackett et Burman*
 - Plans composites centrés
 - *Plans de mélanges*
 - *Plans de Taguchi*
 - *Carrés latins*
 - *Réseaux de Doehlert*
 - Plans de Box Benken

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 10

10

Université
BORDEAUX

Plan factoriel complet à deux niveaux (2^k)

- Exemple



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



Food Chemistry 107 (2008) 1300–1306

Analytical Methods



Food Chemistry

www.elsevier.com/locate/foodchem

Optimisation of conditions for the preparation of β -carotene nanoemulsions using response surface methodology

Yuan Yuan^a, Yanxiang Gao^{b,*}, Like Mao^b, Jian Zhao^b
- Facteurs étudiés

Facteur	Code	Niveau -1	Niveau +1
Concentration β -carotène	C1	0,5%	1,5%
Concentration émulsifiant	C2	8%	12%
Température	T	40°C	60°C
Pression	P	90 MPa	130 MPa
- Réponses
 - Taille des gouttes, en μm (Y_1)
 - Stabilité (Y_2)

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 11

11

université BORDEAUX

➤ 4 facteurs / 2 niveaux

- Plan $2^4 \Rightarrow 16$ expériences

Matrice standard des essais

	Essai	C ₁	C ₂	T	P
1 ^{ère} ligne = -1	1	-1	-1	-1	-1
	2	1	-1	-1	-1
Colonne du 1 ^{er} facteur : alternance de -1 & +1 de 2^0 en 2^0	3	-1	1	-1	-1
	4	1	1	-1	-1
	5	-1	-1	1	-1
	6	1	-1	1	-1
	7	-1	1	1	-1
	8	1	1	1	-1
	9	-1	-1	-1	1
Colonne du 2 ^{ème} facteur : alternance de -1 & +1 de 2^1 en 2^1	10	1	-1	-1	1
	11	-1	1	-1	1
	12	1	1	-1	1
	13	-1	-1	1	1
	14	1	-1	1	1
	15	-1	1	1	1
Dernière ligne = +1	16	1	1	1	1

Colonne du 4^{ème} facteur : alternance de -1 & +1 de 2^3 en 2^3

Colonne du 3^{ème} facteur : alternance de -1 & +1 de 2^2 en 2^2

12

université BORDEAUX

➤ Terminologie

- Matrice des essais :** Tableau présentant les expérimentations à réaliser

➤ Préparation et réalisation des essais

Réponses

	C ₁ (%)	C ₂ (%)	T ^a (°C)	P ^a (MPa)	Particle size (nm)	Emulsion stability
Ordre aléatoire de réalisation des essais	0.5	8	40	90	154	1.41
	1.5	12	40	90	172	0.606
	1.5	8	60	90	170	2.08
	1.5	12	40	130	130	0.541
	1.5	12	60	130	137	0.513
	1.5	8	60	130	142	2.63
	1.5	12	60	90	166	0.472
	0.5	12	40	90	136	0.394
	0.5	12	40	130	122	0.448
	0.5	8	40	130	135	1.64
	0.5	12	60	130	121	0.350
	0.5	8	60	130	127	1.35
	1.5	8	40	130	150	3.57
	0.5	12	60	90	143	0.336
	0.5	8	60	90	147	1.39
	1.5	8	40	90	168	2.86

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

13

Université
BORDEAUX

➤ Une première analyse autour des effets : le graphique des effets

- MEPlot avec R

Main effects plot for y1

Moyenne des réponses pour les expériences où $P = +1$

- Plus une droite est « pentue », plus l'effet est « fort »
- L'effet moyen α_j (pour le facteur j) correspond à l'écart entre la moyenne des réponses pour le niveau 1 et la moyenne globale.
Faire varier le niveau du facteur j de 1 unité modifie en moyenne la réponse de α_j .
- Une droite « horizontale » laisse à penser qu'il n'y a pas d'effet significatif

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

16

Université
BORDEAUX

➤ Graphique des interactions

- Interaction** : il y a interaction entre 2 facteurs A et B si l'effet de A dépend du niveau de B ou inversement
- Une interaction peut être significative lorsque les droites sont potentiellement sécantes ...
Ce ne sont à ce stade que des *conjectures* !

Moyenne de la somnolence pour 2 u.a. de médicament absorbé et 6 u.a. d'alcool ingéré

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

17

université
BORDEAUX

➤ Calcul des effets moyens des interactions

essais	Facteurs					Interactions		Réponses
	X ₁	X ₂	X ₃	X _j	X _k	X ₁ X ₂	...	
1	-1	-1	-1	...	-1	(-1)*(-1)=+1	...	y ₁
2	+1	-1	-1	...	-1	-1		y ₂
3	-1	+1	-1	...	-1	-1		y ₃
⋮								
i	x _{i1}	x _{ij}	...	x _{i1} × x _{i2}		y _i
⋮								
n	+1	+1	+1	...	+1	+1		y _n

L'effet de l'interaction des facteurs j et k est définie par

$$\beta_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} y_i$$

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 18

18

université
BORDEAUX

➤ Hiérarchisation des effets

- Plus $|\alpha_j|/|\beta_{jk}|$ est grand plus l'effet est important
- Classement des effets du plus au moins influent

➤ Sens de modification de la réponse

- Pour un facteur
 - Un effet positif augmente la réponse lorsque l'on augmente le niveau
 - Un effet négatif diminue la réponse lorsque l'on augmente le niveau
- Pour une interaction
 - Signe de l'effet n'a pas de sens « physique »

➤ Effets significatifs
=> recherche d'un modèle mathématique pour des variables quantitatives avec validation « statistique »

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 19

19

Université
BORDEAUX

Modèle et Optimisation

- Relation mathématique décrivant le lien entre réponse et facteurs via les effets (avec interactions)
 - Pour un système à deux facteurs (A_1 et A_2) avec interactions

$$Y = \mu + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \varepsilon$$

- ❖ Y : VA réponse recherchée (aléatoire)
- ❖ μ : valeur moyenne (fixe) de Y
- ❖ α_i : effets moyens (fixes) du facteur A_i
- ❖ β_{12} : effets moyens (fixes) de l'interaction de A_1 et A_2
- ❖ ε : VA des résidus (aléatoires)

20

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

20

Université
BORDEAUX

- Comment qualifier un effet de « significatif » ?
 - Effet \gg l'incertitude \Rightarrow non significatif (cf. p_value)
- Il faut connaître l'incertitude sur l'effet et éventuellement l'incertitude liée à la réponse
 - Variations aléatoires des facteurs non contrôlés (degré hygrométrique, tension électrique...)
 - Erreurs systématiques liées
 - Au changement de niveau d'un facteur non contrôlé entre deux séries d'expériences [bloc]
 - À la dérive au cours de l'étude (vieillesse d'un produit, usure d'une pièce mécanique)
- Distinguer l'effet des facteurs influents du « bruit » (résiduel) \Rightarrow Anova

21

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

21

université
BORDEAUX

Un paramètre intéressant : le coefficient de détermination ajusté

Rappel :

$$R^2 = \frac{SCE_{exp}}{SCE_{totale}} = 1 - \frac{SCE_{res}}{SCE_{totale}}$$

Problème : Augmentation mécanique du coefficient de détermination en augmentant le nombre de coefficients

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{SCE_{res}/(n-p)}{SCE_{totale}/(n-1)} = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p}$$

n = nombre d'expériences
 p = nombre de coefficients à estimer (lié au modèle)

Choix du modèle suivant la valeur du coefficient de détermination ajusté ...

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

22

22

université
BORDEAUX

Validation du modèle à l'aide d'une ANOVA

Conditions d'application :

- * Homoscédasticité (variance identique pour chaque expérience) des distributions de résidus
- * Normalité de la distribution des résidus (QQ-norm)

Le test de Fisher permet de tester l'hypothèse de nullité de tous les paramètres (p coefficients) du modèle.

$$\mathcal{H}_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$$

La statistique de test (pour n expériences) est :

$$\mathcal{F}_{obs} = \frac{CM_{exp}}{CM_{res}} \sim \mathcal{F}(p-1; n-p)$$

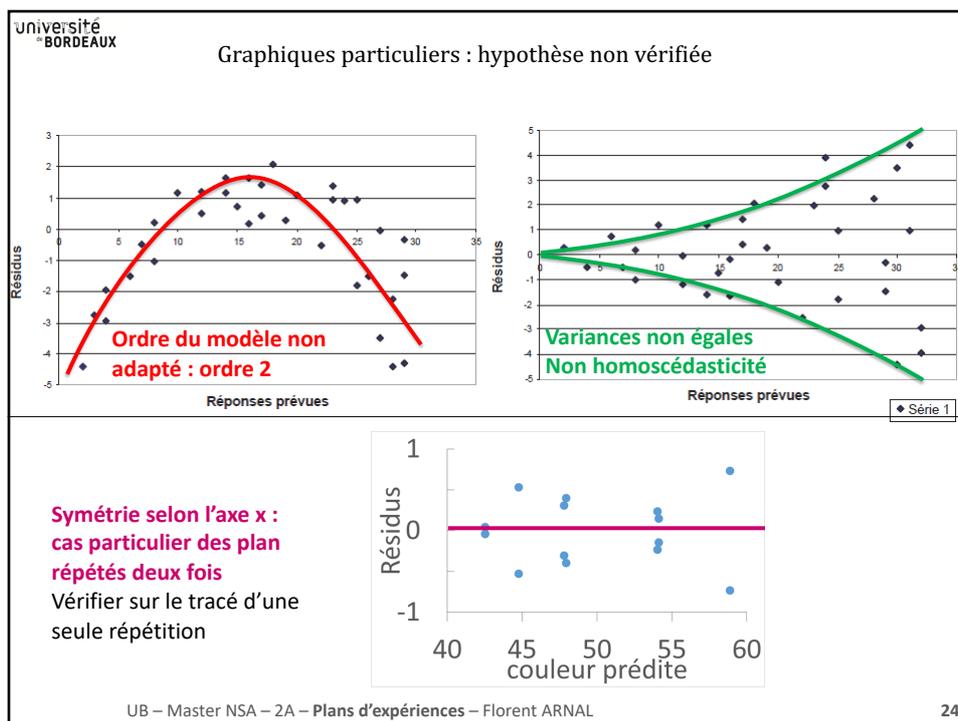
En cas de rejet de \mathcal{H}_0 , on conclut qu'il existe au moins un paramètre non nul dans le modèle.

A noter : Nécessité d'avoir au moins une expérience de plus que le nombre de coefficients recherchés (cf. Variabilité résiduelle)

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

23

23



24

Université
BORDEAUX

- Exemple :
Plan 2^4 avec 4 facteurs
Concentration en β -carotène (C11), en Emulsifiant (C21), Pression (P1)
et Température (T1).
- Régression avec tous les facteurs et leurs interactions
 - 4 effets d'ordre 1
 - 6 effets d'ordre 2 (interactions ordre 1)
 - 4 effets d'ordre 3 (interactions ordre 2)
 - 1 effet d'ordre 4 (interaction ordre 3)

=> 15 coefficients + l'ordonnée à l'origine à déterminer = 16 inconnues
=> Il faut donc au moins 17 expériences pour valider le modèle à l'aide d'une ANOVA alors que le plan 2^4 a 16 expériences ...

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

25

25

université BORDEAUX

Un exemple avec les termes d'interaction d'ordre 2

Modèle :

$$Y = \mu + \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 T + \alpha_4 P + \alpha_{12} C_1 C_2 + \dots + \alpha_{34} P T$$

```
lm.default(y1 ~ (C1 + C2 + T + P)^2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	145.000	1.335	108.644	1.25e-09 ***
C11	9.375	1.335	7.024	0.000902 ***
C21	-4.125	1.335	-3.091	0.027137 *
T1	-0.875	1.335	-0.656	0.541037
P1	-12.000	1.335	-8.991	0.000284 ***
C11:C21	1.000	1.335	0.749	0.487428
C11:T1	0.250	1.335	0.187	0.858776
C11:P1	-2.625	1.335	-1.967	0.106354
C21:T1	1.750	1.335	1.311	0.246768
C21:P1	-1.375	1.335	-1.030	0.350130
T1:P1	-0.375	1.335	-0.281	0.789985

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.339 on 5 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.9672, Adjusted R-squared: 0.9016
 F-statistic: 14.75 on 10 and 5 DF, p-value: 0.004155

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

26

26

université BORDEAUX

➤ Démarche itérative

- Maximum de facteurs + interaction
- 2nde régression avec uniquement les facteurs significatifs de la 1^{ère} (moindre dilution de l'information)

```
call:
lm.default(formula = y1 ~ C1 + C2 + P, data = Formu.withresp)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-8.25	-3.00	-0.50	2.75	9.75

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	145.000	1.376	105.382	< 2e-16 ***
C11	9.375	1.376	6.813	1.87e-05 ***
C21	-4.125	1.376	-2.998	0.0111 *
P1	-12.000	1.376	-8.721	1.54e-06 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.504 on 12 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.9164, Adjusted R-squared: 0.8954
 F-statistic: 43.82 on 3 and 12 DF, p-value: 9.673e-07

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

27

27

université BORDEAUX

- Optimisation déterminée par rapport à :
 - Effets des facteurs
 - Interactions
- Pour la taille des particules y_1 (min):
 - Effets des facteurs significatifs
 - C1- β carotène effet >0 opt=niveau +1
 - C2-émulsifiant effet <0 opt=niveau -1
 - P-pression effet <0 opt= niveau -1

Tester expérimentalement les conditions optimales

Démarche à faire pour chaque réponse *

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 28

28

université BORDEAUX

- Graphiques des effets
 - Y_1
 - Y_2

Echelles différentes sur l'axe des ordonnées selon les graphiques

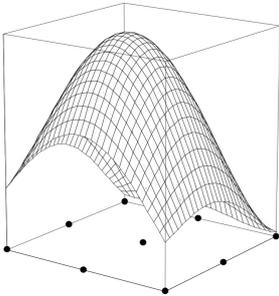
UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

29

université
BORDEAUX

OPTIMISATION

- *Méthode du simplexe*
 - *Exploration du domaine expérimental sans modélisation*
- *Méthode graphique*
 - *Courbe des isoréponses*
- *Méthode numérique*
 - *Désirabilité*
- *Différents algorithmes dont*
 - *Méthodes par glissements*
 - *Méthodes par zoom*
 - *Méthodes exhaustives*



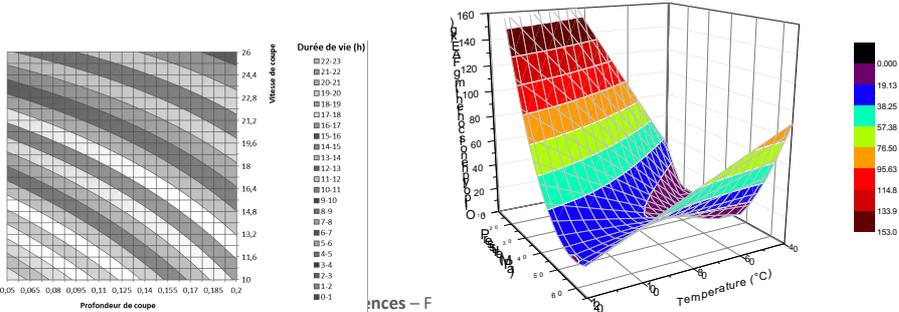
UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

30

30

université
BORDEAUX

- *Courbe d'isoréponses / surface de réponse*
 - *Graphique en 2 ou 3 dimensions présentant les valeurs prise par 2 facteurs permettant d'atteindre la même réponse*
- ❖ *Restriction : il faut que les « facteurs » soient quantitatifs*



ances – F

31

université
BORDEAUX

PLANS FRACTIONNAIRES

- Plans factoriels complets 2^k
 - Nombre d'expériences à réaliser devient très important lorsque le nombre de facteurs augmente
Ex : 5 facteurs $\Rightarrow 2^5 = 32$ expériences
 - Prise en compte de toutes les interactions alors que **certaines interactions peuvent parfois être négligées**
Ex : On néglige les interactions d'ordre supérieur à 1
Ne restent que :
 - les effets de chaque facteur (5)
 - les effets des interactions d'ordre 1 (10)
 - plus l'ordonnée à l'origine
 $\Rightarrow 16$ informations vs 32 initialement

\Rightarrow Utilisation des matrices de plan $2^4 = 2^{5-1}$ (de type 2^{k-p})
= **Plan fractionnaire**

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 32

32

université
BORDEAUX

➤ EXEMPLE AVEC UN PLAN FRACTIONNAIRE 2^{3-1}

On considère trois facteurs A, B et C et on suppose que l'on peut assimiler les effets du facteur C aux interactions entre A et B.
La matrice initiale des effets (2^2) est la suivante :

I	A	B
+1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	-1
+1	-1	-1



I	A	B	AB = C		
+1	+1	+1	+1		
+1	-1	+1	-1		
+1	+1	-1	-1		
+1	-1	-1	+1		

On vient de créer une **confusion (alias) $AB = C$** (appelée ALIAS INITIAL) qui induit la relation
 $ABC = C^2$ soit **$ABC = I$** (appelée GÉNÉRATEUR D'ALIAS).
 Cette relation ($ABC = I$) induit deux autres alias.es
 $A = A*I = A*(ABC) = A^2*BC = I*BC \Rightarrow \mathbf{A = BC}$
 $B = B*I = B*(ABC) = A*B^2*C = A*I*C \Rightarrow \mathbf{B = AC}$
 Ainsi, l'ordonnée à l'origine est alors confondue avec ABC, A est confondu avec BC et B avec AC.

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 33

33

université BORDEAUX

➤ EXEMPLE AVEC UN PLAN FRACTIONNAIRE 2^{3-1}

On obtient donc la matrice d'effets suivante :

I	A	B
+1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	-1
+1	-1	-1

I=ABC	A=BC	B=AC	AB = C
+1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	-1
+1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	+1

Un tel plan permet d'étudier uniquement les effets principaux A, B et C en utilisant un modèle du type

$$Y = \mu + \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C$$

34

34

université BORDEAUX

EXEMPLE AVEC UN PLAN FRACTIONNAIRE 2^{4-1} AVEC D = ABC

	1	2	3	4	5	6	7	8	Y
	A BCD	B ACD	C ABD	AB CD	BC AD	AC BD	ABC D	I ABCD	
Essai 1	-	-	-	+	+	+	-	+	y ₁
Essai 2	+	-	-	-	+	-	+	+	y ₂
Essai 3	-	+	-	-	-	+	+	+	y ₃
Essai 4	+	+	-	+	-	-	-	+	y ₄
Essai 5	-	-	+	+	-	-	+	+	y ₅
Essai 6	+	-	+	-	-	+	-	+	y ₆
Essai 7	-	+	+	-	+	-	-	+	y ₇
Essai 8	+	+	+	+	+	+	+	+	y ₈

L'alias (confusion) $A = BCD$ induit des effets qui sont regroupés dans ce que l'on appelle un contraste.
Ainsi, le contraste associé h est défini par

$$h = \alpha_A + \alpha_{BCD}$$

avec

$$h = \frac{1}{8} (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8)$$

35

35

Hypothèses liées à un plan fractionnaire

- Hypothèse 1
Des interactions (d'ordre 2 (interaction entre 2 facteurs) ou d'ordre plus élevé par exemple) sont considérées comme négligeables.
On élimine ainsi un grand nombre d'inconnues.
Mais attention cette hypothèse peut parfois être mise en défaut.
- Hypothèse 2
Si un contraste est nul, cela peut signifier que les effets et les interactions aliasés sont tous nuls.
C'est l'hypothèse la plus probable mais il y a toujours un risque que les effets et les interactions aliasés se compensent (peu probable).
- Hypothèse 3
Si deux contrastes sont faibles, on supposera que leur interaction l'est aussi.
Si un contraste est faible et l'autre fort, on supposera que leur interaction est faible.
- Hypothèse 4
Si deux contrastes sont forts, on se méfiera de leur interaction qui peut l'être également.

36

GÉNÉRALISATION PLANS 2^{K-P}

- Nombre de facteurs et nombre d'essais pour p alias :
 - 1 alias => 1 générateur
 - 2 alias => 2 générateurs par carré et 1 par produit
=> 3 générateurs (voir exemple diapo 39)
 - Plus généralement,
 p alias.es induisent $\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} = 2^p - 1$ générateurs.
- Résolution = longueur du plus petit générateur d'alias

Résolution III : effets principaux confondus avec interactions d'ordre 2 ou plus
 Résolution IV : effets principaux confondus avec interactions d'ordre 3 ou plus
 Résolution V : effets principaux confondus avec interactions d'ordre 4 ou plus
 et interactions d'ordre 2 ou plus confondues avec interactions d'ordre 3 ou plus

La résolution est un *indicateur de la qualité d'un plan* car plus elle est élevée, plus on peut estimer « facilement » les effets principaux

37

université
BORDEAUX

- Plans complémentaires
 - $p=1 \rightarrow$ demi plan complet $(1/2)^1$
 - $p=2 \rightarrow$ quart de plan complet $(1/2)^2$
 - $p=n \rightarrow (1/2)^n$ de plan complet

- Plus n est grand plus le risque de devoir recourir à 1 ou plusieurs plans complémentaires est grand : comment choisir le plus judicieux
 - Selon l'information souhaitée, choisir le.s générateur.s d'alias.es permettant de séparer les effets intéressants
 - Il faut que les effets intéressants soient aliasés avec des interactions négligeables
 - On crée souvent des alias.es en utilisant la règle suivante :
Création d'un facteur avec l'interaction la plus élevée
Création de deux facteurs avec des interactions d'ordre (« le plus élevé » -1).

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 38

38

université
BORDEAUX

EXEMPLE PLAN 2^{5-2}

- Deux alias.es : $V = RLC$ et $U = LC$

- Générateurs d'alias
 - Indépendants et 1 dépendant : $RVU = I$ (par produit)
 - ❖ $I = CLR$ alias 1
 - ❖ $I = CLU$ alias 2

	1	2	3	4	5	6	7	8
	C	L	R	CL	LR	CR	CLR	I
Alias 1	LRV	CRV	CLV	RV	CV	LV	V	CLRV
Alias 2	LU	CU	CRLU	U	CRU	LRU	UR	CLU
Alias 3	CRVU	LRVU	VU	CLRVU	LVU	CVU	CLU	RVU

- 32 effets

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 39

39

Université
BORDEAUX

EXEMPLE PLAN 2⁵⁻²

➤ Matrice des essais : $V=RLC$ et $U=LC$

	1	2	3	4	7
	C	L	R	U	V
Essai 1	-	-	-	+	-
Essai 2	+	-	-	-	+
Essai 3	-	+	-	-	+
Essai 4	+	+	-	+	-
Essai 5	-	-	+	+	+
Essai 6	+	-	+	-	-
Essai 7	-	+	+	-	-
Essai 8	+	+	+	+	+

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

40

40

Université
BORDEAUX

```

Rcmdr> summary( CLRUV , brief = TRUE)
Design was generated with RcmdrPlugin.DOE

Experimental design of type FrF2.generators
8 runs
each run independently conducted 2 times

Factor settings (scale ends):
  C  L  R  V  U
1 -1 -1 -1 -1 -1
2  1  1  1  1  1

Responses:
[1] y

Design generating information:
$legend
[1] A=C B=L C=R D=V E=U

$generators
[1] D=ABC E=AB

Alias structure:
$main
[1] A=BE B=AE C=DE D=CE E=AB=CD

$fi2
[1] AC=BD AD=BC

Coefficients: (8 not defined because of singularities)
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 18.11250    0.03536 512.299 < 2e-16 ***
C1            2.68750    0.03536  76.014 1.00e-12 ***
L1           -0.46250    0.03536 -13.081 1.11e-06 ***
R1           -0.06250    0.03536  -1.768 0.11508
V1           -0.51250    0.03536 -14.496 5.02e-07 ***
U1            1.41250    0.03536  39.952 1.69e-10 ***
C1:L1         NA            NA      NA      NA
C1:R1        -0.03750    0.03536  -1.061 0.31981
C1:V1         0.16250    0.03536   4.596 0.00176 **
C1:U1         NA            NA      NA      NA
L1:R1         NA            NA      NA      NA
L1:V1         NA            NA      NA      NA
L1:U1         NA            NA      NA      NA
R1:V1         NA            NA      NA      NA
R1:U1         NA            NA      NA      NA
V1:U1         NA            NA      NA      NA
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1414 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.999, Adjusted R-squared:  0.9981
F-statistic: 1112 on 7 and 8 DF, p-value: 2.606e-11

```

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

41

41

université
BORDEAUX

➤ Interprétation des résultats

- Hypothèses :
 - Interactions d'ordre élevé négligeables (souvent dès l'ordre 2)
 - Lorsqu'un contraste est négligeable, chaque effet alié dans ce contraste est individuellement négligeable

Significatifs	Non significatifs
1 - C+LU	3 - R+VU
2 - L+CU	6 - CR+LV
4 - CL+RV+U	
7 - V+UR	
5 - LR+CV	
8 - I	

➔ R non significatif
VU, CR, LV non significatifs

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 42

42

université
BORDEAUX

➤ Interprétation des résultats

- Deux effets influents peuvent donner lieu à une interaction mais on néglige les interactions mettant en jeu des facteurs non-significatifs

Significatifs	Non significatifs
1 : C+LU	3 - R +VU
2 : L+CU	6 - CR+LV
4 : CL+ RV +U	
7 : V+ UR	
5 : LR +CV	
8 : I	

R non significatif
=> RV, UR, LR non significatifs

➤ Il reste des indéterminations
Qui de C ou LU est significatif ? De L ou CU ? De CL ou U ?
=> Mise en place d'un plan complémentaire

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 43

43

➤ **Un exemple pour comprendre comment compléter un plan fractionnaire pour obtenir des informations indispensables pour une étude pertinente**

Supposons, par exemple, qu'avec un plan 2^{4-2} , on ait expérimenté la 1^{ère} fraction avec les alias.es (confusions) : $C = AB$ et $D = BC$.

On a donc : $ABC = BCD = I$

On suppose que le contraste $A = D = BC$ est significatif contrairement à $B = AC = CD$ et $C = AB = BD$.

=> B et C n'ont pas d'effet significatif ainsi que les interactions AB, AC, BD et CD
On considère également qu'il n'y a pas d'interaction BC car individuellement aucun de ces 2 facteurs principaux n'a d'effet.

Le contraste $A = D (= BC)$ est donc significatif.

Cependant les contrastes E'_A et E'_D liés à A et D sont égaux.

Une dernière question reste donc à trancher :
Qu'en est-il de l'effet de A et D, sachant que l'un des deux, au moins, est significatif ?

➤ **Reprenons l'exemple lié à un plan complémentaire du plan fractionnaire 2^{5-2}**

	1	2	3	4	5	6	7	8
	C *	L *	R	CL *	LR	CR	CLR	I
Aliase 1	LRV	CRV	CLV	RV	CV *	LV	V *	CLRV
Aliase 2	LU *	CU *	CRLU	U *	CRU	LRU	UR	CLU
Aliase 3	CRVU	LRVU	VU	CLRVU	LVU	CVU	CLU	RVU

* = significatif

- Choix du quart de plan complémentaire le plus adapté pour « désialiser »
- $2^{k-2} \Rightarrow$ on fait $\frac{1}{4}$ du plan complet (soit 8 nouvelles expériences ici)
 - Quels alias.es des plans complémentaires choisir parmi

V = CLR
U = -CL

V = -CLR
U = CL

V = -CLR
U = -CL

université BORDEAUX

➤ Plan complémentaire

- Quelles sont les informations complémentaires dont on a besoin ?

	1	2	4		1'	2'	4'
	C*	L*	CL*		C	L	CL
Alias 1	LRV	CRV	RV	Alias 1	+/-LRV	+/-CRV	+/-RV
Alias 2	LU*	CU*	U*	Alias 2	- LU	- CU	- U
Alias 3	CRVU	LRVU	CLRVU	Alias 3	+/-CRVU <i>C = - LU</i> <i>i.e.</i> <i>U = - CL</i>	+/-LRVU <i>L = - CU</i> <i>i.e.</i> <i>U = - CL</i>	+/-CLRVU <i>CL = - U</i> <i>i.e.</i> <i>U = - CL</i>

On peut donc choisir (au choix) :

V = CLR
U = - CL

V = - CLR
U = - CL

Les contrastes s'obtiendront ainsi :

$$C = \frac{h_1 + h_1'}{2} \quad L = \frac{h_2 + h_2'}{2} \quad U = \frac{h_4 + h_4'}{2}$$

$$LU = \frac{h_1 - h_1'}{2} \quad CU = \frac{h_2 - h_2'}{2} \quad CL = \frac{h_4 - h_4'}{2}$$

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 46

46

université BORDEAUX

Considérons : V = CLR et U = - CL
planbis = fold.design(plan, columns=5)

```

planbis
## run.no run.no.std.rp C L R fold V U y
## 1 1 1.1 -1 -1 -1 original -1 1 17.9
## 2 2 2.1 1 -1 -1 original 1 -1 19.5
## 3 3 3.1 -1 1 -1 original 1 -1 12.8
## 4 4 4.1 1 1 -1 original -1 1 22.1
## 5 5 5.1 -1 -1 1 original 1 1 16.5
## 6 6 6.1 1 -1 1 original -1 -1 20.0
## 7 7 7.1 -1 1 1 original -1 -1 14.1
## 8 8 8.1 1 1 1 original 1 1 21.2
## 9 9 1.2 -1 -1 -1 original -1 1 18.1
## 10 10 2.2 1 -1 -1 original 1 -1 19.7
## 11 11 3.2 -1 1 -1 original 1 -1 13.0
## 12 12 4.2 1 1 -1 original -1 1 22.3
## 13 13 5.2 -1 -1 1 original 1 1 16.7
## 14 14 6.2 1 -1 1 original -1 -1 20.2
## 15 15 7.2 -1 1 1 original -1 -1 14.3
## 16 16 8.2 1 1 1 original 1 1 21.4
## 17 17 9.1 -1 -1 -1 mirror -1 -1 NA
## 18 18 10.1 1 -1 -1 mirror 1 1 NA
## 19 19 11.1 -1 1 -1 mirror 1 1 NA
## 20 20 <NA> 1 1 -1 mirror -1 -1 NA
## 21 21 <NA> -1 -1 1 mirror 1 -1 NA
## 22 22 <NA> 1 -1 1 mirror -1 1 NA
## 23 23 <NA> -1 1 1 mirror -1 1 NA
## 24 24 <NA> 1 1 1 mirror 1 -1 NA
## 25 25 9.2 -1 -1 -1 mirror -1 -1 NA
## 26 26 10.2 1 -1 -1 mirror 1 1 NA
## 27 27 11.2 -1 1 -1 mirror 1 1 NA
## 28 28 <NA> 1 1 -1 mirror -1 -1 NA
## 29 29 <NA> -1 -1 1 mirror 1 -1 NA
## 30 30 <NA> 1 -1 1 mirror -1 1 NA
## 31 31 <NA> -1 1 1 mirror -1 1 NA
## 32 32 <NA> 1 1 1 mirror 1 -1 NA
## class=design, type= FrF2.generators.folded
    
```

Nouveau facteur = facteur bloc
On néglige toutes les interactions de ce facteur

```

design.info(planbis)$aliased
## $legend
## [1] "A=C" "B=L" "C=R"
## "D=fold" "E=V" "F=U"
##
## $main
## character(0)
##
## $fi2
## [1] "AB=CE=-DE" "AC=BE"
## "CL+RV" "CR+LV"
## "AD=-BF"
## "-LU"
## "AE=BC" "AF=-BD" "CD=-EF"
## "CV+LR" "DU" "-VU"
## [7] "CF=-DE"
## "RU"
    
```

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 47

47

```

Université
BORDEAUX

planbis<-add.response(planbis, "25-2cptlt.csv", InDec=",", replace=TRUE)
reg2<-lm(y~(C+L+R+V+U)^2+fold, data=planbis)
summary.lm(reg2)

##
## Call:
## lm.default(formula = y ~ (C + L + R + V + U)^2 + fold, data = planbis)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.3125 -0.1437  0.0000  0.1437  0.3125
##
## Coefficients: (3 not defined because of singularities)
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.805e+01  4.832e-02 373.532 < 2e-16 ***
## C1           2.675e+00  4.832e-02  55.357 < 2e-16 ***
## L1          -4.625e-01  4.832e-02  -9.571 1.75e-08 ***
## R1          -1.250e-02  4.832e-02  -0.259 0.798818
## V1          -2.500e-01  4.832e-02  -5.174 6.39e-05 ***
## U1           2.075e+00  4.832e-02  42.941 < 2e-16 ***
## fold1       -6.250e-02  4.832e-02  -1.293 0.212229
## C1:L1       -6.625e-01  4.832e-02 -13.710 5.75e-11 ***
## C1:R1       -2.125e-01  4.832e-02  -4.398 0.000347 ***
## C1:V1       1.250e-01  4.832e-02  2.587 0.018609 *
## C1:U1       8.166e-16  4.832e-02  0.000 1.000000
## L1:R1       NA         NA         NA         NA
## L1:V1       NA         NA         NA         NA
## L1:U1       1.250e-02  4.832e-02  0.259 0.798818
## R1:V1       NA         NA         NA         NA
## R1:U1      -2.625e-01  4.832e-02  -5.432 3.68e-05 ***
## V1:U1      -5.000e-02  4.832e-02  -1.035 0.314505
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.2734 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9966, Adjusted R-squared:  0.9941
## F-statistic: 405.6 on 13 and 18 DF,  p-value: < 2.2e-16
    
```

Significatif	Non-significatif
C	R
L	Bloc
V	CU
U	LU
CL+RV	VU
CR+LV	
CV+LR	
RU	

48

48

```

Université
BORDEAUX
    
```

Résultats liés au plan fractionnaire initial

Significatifs	Non significatifs
1 : C+LU	3 - R+VU
2 : L+CU	6 - CR+LV
4 : CL+RV+U	
7 : V+UR	
5 : LR+CV	
8 : I	

Résultats liés au plan complémentaire

Significatif	Non-significatif
C	R
L	Bloc
V	CU
U	LU
CL+RV	VU
CR+LV	
CV+LR	
RU	

R non significatif
=> RV, CR et LR non significatifs

49

université BORDEAUX

```

## Coefficients: (3 not defined because of singularities)
##      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.805e+01  4.832e-02 373.532 < 2e-16 ***
## C1           2.675e+00  4.832e-02  55.357 < 2e-16 ***
## L1          -4.625e-01  4.832e-02 -9.571 1.75e-08 ***
## R1          -1.250e-02  4.832e-02 -0.259 0.798818
## V1          -2.500e-01  4.832e-02 -5.174 6.39e-05 ***
## U1           2.075e+00  4.832e-02 42.941 < 2e-16 ***
## fold1       -6.250e-02  4.832e-02 -1.293 0.212229
## C1:L1       -6.625e-01  4.832e-02 -13.710 5.75e-11 ***
## C1:R1       -2.125e-01  4.832e-02 -4.398 0.000347 ***
## C1:V1       1.250e-01  4.832e-02  2.587 0.018609 *
## C1:U1       8.166e-16  4.832e-02  0.000 1.000000
## L1:R1       NA          NA          NA          NA
## L1:V1       NA          NA          NA          NA
## L1:U1       1.250e-02  4.832e-02  0.259 0.798818
## R1:V1       NA          NA          NA          NA
## R1:U1       -2.625e-01  4.832e-02 -5.432 3.68e-05 ***
## V1:U1       -5.000e-02  4.832e-02 -1.035 0.314505
    
```

➤ Optimisation (maximisation)

- C a un effet positif significatif => C = +1
- L a un effet négatif significatif => L = -1
- V a un effet négatif significatif => V = -1
- U a un effet positif significatif => U = +1
- RU a un effet négatif significatif et l'optimisation a conduit à U=+1 donc R = -1

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 50

50

université BORDEAUX

PLANS DU 2ND ORDRE

➤ Modèles du 2nd ordre envisagés si

- les modèles du 1^{er} ordre sont insuffisants
- l'on suppose des réponses non linéaires du type $Y = \alpha + \alpha_1 X_1 + \alpha_{11} X_1^2 + \alpha_2 X_2 + \dots$ et/ou que l'on cherche à optimiser la réponse

➤ Exemple de plan d'ordre 2

- **Plans composites centrés** (plan en surface de réponse)

Cas de k facteurs :

$N_F = 2^k$ points si plan factoriel complet

$2k$ points en étoile

n_0 répétitions du points central

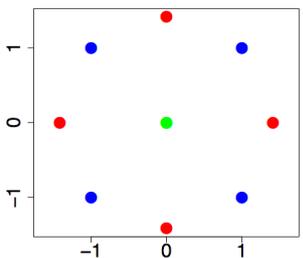
UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL 51

51

Université BORDEAUX

- Exemple de construction d'un plan composite centré à $k=2$ facteurs
- $N_F = 2^2 = 4$ **points initiaux**
- Points en étoile avec $\alpha = N_F^{1/4}$ pour plan rotatable (invariant par rotation)
- Points au centre

Exemple avec 2 facteurs



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

52

52

Le nombre de points au centre a un impact sur :

- la précision uniforme : variance des prévisions uniforme dans le domaine
- L'orthogonalité liée à une matrice influant sur la variance (plan quasi optimal)

Nombre de facteurs (k)	2	3	4	5	6
Plan factoriel complet ou fractionnaire	2^2	2^3	2^4	2^{5-1}	2^{6-1}
Nombre de points du plan factoriel : $n_f = 2^{k-p}$	4	8	16	16	32
Niveau codé des points axiaux : $\alpha = \sqrt[4]{n_f}$	1.414	1.682	2	2	2.378
Nombre de points axiaux : $n_\alpha = 2k$	4	6	8	10	12
Nombre de points au centre : n_0					
cas de l'orthogonalité	8	9	12	10	15
cas de la précision uniforme	5	6	7	6	9
Nombre total de points ($n_f + n_\alpha + n_0$)					
orthogonalité	16	23	36	36	59
précision uniforme	13	20	31	32	53

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

2022-2023 53

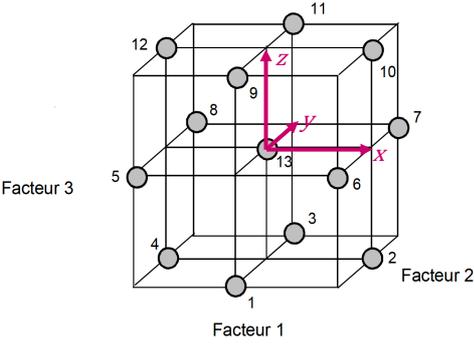
53

université
de BORDEAUX

➤ **Modèles d'ordre 2 : plans de Box-Behnken**

- Exemple avec 3 facteurs

Points situés au milieu des arêtes du cube au nombre de $3 \times 2^2 = 12$ plus le point au centre (0;0;0)



n° essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	0	-1	-1
2	+1	0	-1
3	0	+1	-1
4	-1	0	-1
5	-1	-1	0
6	+1	-1	0
7	+1	+1	0
8	-1	+1	0
9	0	-1	+1
10	+1	0	+1
11	0	+1	+1
12	-1	0	+1
13	0	0	0

UB – Master NSA – 2A – Plans d'expériences – Florent ARNAL

54

université
de BORDEAUX

Optimisation

55

➤ Méthode numérique

- Désirabilité
 - Package desirability
 - ❖ Basé sur les modèles issus des régressions

Construction de fonctions de désirabilité individuelles (F_i) puis d'une fonction de désirabilité globale $F = \prod F_i$ et enfin recherche du maximum de la fonction de désirabilité F

