Année universitaire 2022-2023

Cours d'Algèbre linéaire

BUT GEII

Semestre 4

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

I Généralités

DÉFINITION 1 :
Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice toute application M de $[\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!] \to \mathbb{R}$ telle que

$$M : \begin{array}{ccc} [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!] & \to & \mathbb{R} \\ (i,j) & \mapsto & M(i,j) = m_{i,j} \end{array}$$

$(m_{i,j})$ est appelé coefficient de la matrice M d'indices i et j, le premier indice est appelé indice de ligne, et le second indice de colonne.
On dit que M est de taille $m \times n$ ou de type (m,n). L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1 *Considérons la matrice* $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. *On a :* $m_{11} = 3$ *et* $m_{22} = 2$.

Exemple 2 $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice ligne.* $N \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

REMARQUE 1 :
- Deux matrices sont égales si elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.
- Lorsque $m = n$, on dit que la matrice est carrée (d'ordre n). L'ensemble des matrices carrés à n lignes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Lorsque $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne.
- Lorsque $m = 1$, on dit que M est une matrice colonne.

DÉFINITION 2 : [Matrices carrées particulières]
M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :
- triangulaire supérieure si : $\forall (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!], i > j \Rightarrow m_{ij} = 0$.
- triangulaire inférieure si : $\forall (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!], i < j \Rightarrow m_{ij} = 0$.
- diagonale si : $\forall (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0$.

REMARQUE 2 : Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les éléments au dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple 3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale.*

DÉFINITION 3 :
- La matrice de taille (m,n) dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle de taille $n \times m$ et notée $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$ voire 0.
- La matrice carrée diagonale de taille n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1 appelée matrice unité (ou identité) de taille n et notée I_n.

Ainsi : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II Opérations sur les matrices

DÉFINITION 4 : La somme de deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en ajoutant les éléments correspondants de A et B . Ainsi, pour tout couple $(i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!]$, on a

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple 4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

III Multiplication d'une matrice par un réel

DÉFINITION 5 : Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et λ un réel.
Le produit de la matrice A par le réel λ, noté λA est la matrice $A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!], a'_{ij} = \lambda a_{ij}$$

IV Multiplication de matrices entre elles

DÉFINITION 6 : Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et B une matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Le produit matriciel de A par B, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;n]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ -1 \times 3 + 3 \times 2 & -1 \times 1 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 3 :
Le nombre de colonnes de la "première" matrice doit être égal au nombre de lignes de la " seconde " matrice. Sans cela, la multiplication n'est pas définie.
Le produit de deux matrices $\mathrm{A}_{(\mathbf{m,n})}B_{(\mathbf{n,p})}$ est une matrice $\mathrm{C}_{(\mathbf{m,p})}$, c'est-à-dire avec le même nombre de lignes que la "première" et le même nombre de "colonnes" que la "seconde".

Exercice 1 *Calculer $A - B$, AB puis A^2 sachant que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

✍

REMARQUE 4 :

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

   On constate donc que le produit de matrices n'est pas commutatif ! En général :

   $$A.B \neq B.A$$

2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On peut calculer AB mais le produit BA n'est pas défini.

PROPRIÉTÉ 1 : Produit de matrices triangulaires et diagonales
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De même le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure et le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
De plus, si $A = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = Diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$ alors le produit AB est égal à la matrice diagonale définie par $AB = Diag(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$. En particulier, les matrices diagonales commutent entre elles.

V Matrice transposée

DÉFINITION 7 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A et on note ${}^tA = \left(a'_{ij}\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!],\ a'_{ij} = a_{ji}$$

REMARQUE 5 : ${}^tA$ est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes (et vice versa).

Exemple 6 (Matrices transposées)

- *Considérons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *On a :* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- *La transposée de la matrice B définie par* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ *est* ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 2 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et k un réel.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$; ${}^t({}^tA) = A$; ${}^t(kA) = k\,{}^tA$.
- ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$.

VI Matrices carrés inversibles

Théorème-Définition 1 : Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A.B = B.A = I_n$$

Si A est inversible, la matrice B est unique et appelée la matrice inverse de A, notée A^{-1}.

D'après la définition, trouver une matrice A' telle que $AA' = I_n$, ne suffit pas, il faut aussi vérifier que $A'A = I_n$.

Théorème 1 : Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à droite i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = I_n$;
(iii) A est inversible à gauche i.e. $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), CA = I_n$.
Si de plus tel est le cas, $A^{-1} = B = C$.

Exemple 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Trouver* A^{-1} *si elle existe.*

On cherche, sous réserve d'existence, une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *telle que*

$AB = I_2$ *soit* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *conduisant au système* $\begin{cases} a+c=1 \\ c=0 \\ b+d=0 \\ d=1 \end{cases}$ *soit* $\begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=-1 \\ d=1 \end{cases}$.

Ainsi, la matrice inverse de A *est* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 2 : [Inversion d'une matrice carrée d'ordre 2]
Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$ admet une matrice inverse telle que :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Propriété 3 : Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} ={}^t \left(A^{-1}\right)$;
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

Propriété 4 : Une matrice diagonale A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Si $A = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible alors $A^{-1} = Diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Exemple 8 (Inversion d'une matrice carré d'ordre 3)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. *On admet que cette matrice est inversible.*
D'après ce qui précède, si A *est inversible, on a :*

$$AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

Cette relation permet de déterminer la matrice inverse de A *mais également de résoudre un système d'équations.*
En considérant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *on obtient :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour obtenir la matrice inverse de A, *il suffit de résoudre un système en explicitant* x, y *et* z *en fonction de* a, b *et* c. *Dans notre exemple, on a :*

$$\begin{cases} -x+2y+5z=a \\ x+2y+3z=b \\ -2x+8y+10z=c \end{cases}$$

Appliquons la méthode du ***pivot de Gauss*** *:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 5/8 & -1/8 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

Théorème 3 : [Systèmes et écriture matricielle]
Soit n un entier naturel non nul.
Le système $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \cdots & & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$ s'écrit $AX = Y$
avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$., $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
En outre, si A est inversible, le système (S) admet un unique n-uplet solution.
Si A n'est pas inversible, le système(S) admet aucune ou une infinité de solutions.

VII Exercices

Exercice 1 : $\star$
Effectuer toutes les multiplications possibles entre les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : $\star\star$
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$, $A + 2B$, AB et BA.
2. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   (a) $A - 3X = 2B$.
   (b) $3X + 2B = 5X + 3A$.

Exercice 3 : $\star\star$ [Puissances d'une matrice carrée]
On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n, A^n et B^n.

Exercice 4 : $\star\star$
Les matrices A et B sont dites commutables si $A \times B = B \times A$.
Trouver toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : $\star\star$
Soient A et B les matrices définiespar : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer ${}^t(AB)$ ainsi que ${}^tB{}^tA$.

Exercice 6 : $\star$
Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
Calculer ${}^tX.Y$. À quelle notion mathématique fait référence ce calcul ?

Exercice 7 : $\star\star$
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.
Exprimer A^2 en fonction de A et I et en déduire A^{-1}.

Exercice 8 : $\star\star$
Soient A et B deux matrices carrées de même ordre telles que la matrice AB est inversible, d'inverse la matrice C.
Montrer alors que B est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 9 : $\star\star$
Soient A et B deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels.
Montrer que si $AB = 0$ alors les matrices A et B ne sont pas inversibles.

Exercice 10 : ⋆⋆
On considère la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer A^{-1} et en déduire la résolution du système $\left\{ \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \right.$.

Exercice 11 : ⋆⋆
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 12 : ⋆⋆
Dans un ordinateur, la norme IEEE 754 simple précision (32 bits) permet de coder des nombres entre environ 10^{-45} et 10^{38} avec une précision de 8 à 9 chiffres significatifs en base 10.
Ainsi, si l'on considère le nombre $\varepsilon = 10^{-10}$, alors $1+\varepsilon$ sera tronqué à 1 par l'ordinateur. De même, le calcul $1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$ donnera 10^{10} comme résultat.
On s'intéresse ici à la résolution du système
$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} \varepsilon X & + & Y & = & 1 \\ X & + & 2Y & = & 3 \end{array} \right.$$

1. On considère $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer l'inverse de A et en déduire la résolution de (S).
2. On considère maintenant que le calcul est fait par un ordinateur avec les erreurs de troncature explicitées précédemment.
   En utilisant la méthode du pivot de Gauss, éliminer X et finir la résolution. Comparer le résultat avec la solution exacte pour $\varepsilon = 10^{-10}$.

Exercice 13 : ⋆⋆
On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB puis BA et comparer ces deux résultats.
2. Calculer A^2 (on donnera le résultat sous forme "simplifiée").
3. On note $M'(x';y')$ l'image de $M(x;y)$ par la rotation de centre O et d'angle α dans le plan.
   Exprimer x' et y' en fonction de α, x et y.
4. Que représentent A et B ? Interpréter le résultat obtenu au 1.
5. Déterminer A^n où n est un entier naturel non nul.

Exercice 14 : ⋆⋆
Soient a, b et c trois réels quelconques.
Résoudre, par la méthode du pivot de Gauss, $\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 6 \\ 2x+z & = & 5 \\ 2x+y-z & = & 1 \end{array} \right.$ puis le système $\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & a \\ 2x+z & = & b \\ 2x+y-z & = & c \end{array} \right.$.
En déduire l'existence d'une matrice inverse, que l'on déterminera, de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 : $\star\star$

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 : $\star\star$

Déterminer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 : $\star\star$

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. En déduire le nombre de solutions (possibles) du système $(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$.
3. Résoudre le système (S).

Exercice 18 : $\star\star$

L'objectif de cette partie est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \quad ; \quad u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1$$

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1} et calculer PDP^{-1}.
   (b) En déduire A^n pour tout entier naturel n.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose
   $$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Exprimer X_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 19 : $\star\star$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_2.
2. En utilisant la relation précédente, déterminer A^3.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on souhaite déterminer l'expression de la matrice A^n.
   On convient que, pour tout entier n, on a : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ et on pose $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que : $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $M = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire les expressions de α_n et β_n en fonction de n.