Mémento de Mathématiques pour le GEII

Année universitaire 2025-2026

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

I Puissances

Soient a et b des réels, p et q étant des entiers.

$$a^p \times a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (ab)^p = a^p \times b^p$$

Notation scientifique :
Un nombre réel A s'écrit sous forme scientifique sous la forme

$$A = D \times 10^p$$

où D est un nombre décimal n'ayant qu'un seul chiffre non nul avant la virgule.

II Identités remarquables

Identités remarquables de degré 2 :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$$

Identités remarquables de degré 3 :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ peuvent se retrouver en utilisant le triangle de Pascal.
Soit n un entier naturel non nul.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Par convention : $0! = 1$.

III Équation de droite

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère avec $x_A \neq x_B$.
La droite (AB) a une équation de la forme

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

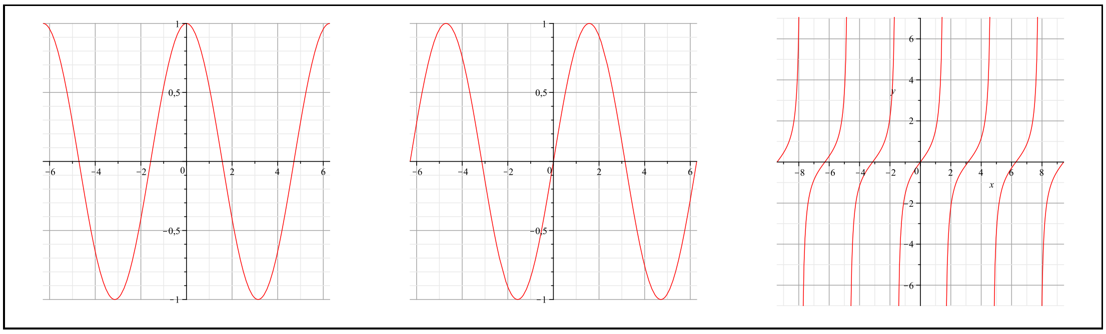
avec $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

FONCTIONS CIRCULAIRES
ET TRIGONOMÉTRIE

I Fonctions circulaires

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1; 1]$.
- Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques.
- sin est impaire et cos est paire.
- La fonction tangente est définie par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
  Elle est π-périodique.

Courbes des fonctions cos, sin **et** tan **:**



Périodicité :
Lorsque $\omega > 0$ les fonctions du type $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

II Formules de Trigonométrie

Relations liés au cercle trigonométrique :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Formules d'addition et duplication :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Formules de réduction du carré :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Formules de développement :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \qquad \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b \qquad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b.$$

Formules de factorisation :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \qquad \cos a \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.$$

Transformation de sommes en produits :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}.$$

Résolution d'équations trigonométriques :

- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a\,[2\pi]$ ou $b = -a\,[2\pi]$.
- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a\,[2\pi]$ ou $b = \pi - a\,[2\pi]$.

Transformation d'une expression du type a$\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$:

$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\left\{\begin{array}{l} a = A\cos\varphi \\ b = A\sin\varphi \end{array}\right.$.

III Linéarisation

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}.$$

I Module et arguments

Soient $z = a + jb$ (de module ρ et d'argument θ) et z' deux nombres complexes non nuls.

Détermination du module et d'un argument :

$z = \rho\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) = \rho\,\mathrm{e}^{j\theta}$ avec $\left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} \end{array}\right.$.

Lorsque a est non nul, on a : $\tan\theta = \frac{b}{a}$ donc $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k\pi$ avec $k = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & a > 0 \\ 1 & \text{si} & a < 0 \end{array}\right.$.

Propriétés du module et d'un argument :

- **Module d'un nombre complexe** :
  Si $z = a + ib$, alors :
  $$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$
- **Produit de deux nombres complexes** :
  $$|zz'| = |z|\cdot|z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$$
- **Conjugué d'un nombre complexe** :
  $$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$$
- **Inverse d'un nombre complexe non nul** :
  $$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$$
- **Quotient de deux nombres complexes** :
  $$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$
- **Produit par le conjugué** :
  $$z\bar{z} = |z|^2$$
- **Caractérisation des réels** :
  $$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$$
- **Caractérisation des imaginaires purs** :
  $$z \text{ est imaginaire pur} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

II Equations

Equation du second degré :

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$. On a alors :
$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_0\right)^2$$
- Si Δ est non nul alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ. On a alors :
$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)$$

Racines n-ièmes de l'unité :
Soit n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes de la forme

$$\mathrm{e}^{\frac{2jk\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0; n-1]\!]$$

FONCTIONS

I Autour de ln et exp

Propriétés algébriques de ln et exp :
Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall p \in \mathbb{R}$, $\ln(a^p) = p\ln(a)$.

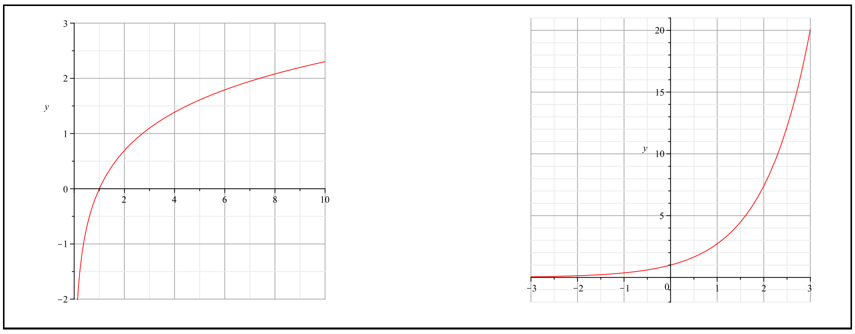
Soient a et b deux réels.

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
- $\forall n \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Lien entre ln et exp :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- $\forall y > 0$, on a : $\mathrm{e}^{\ln y} = y$.

Courbes des fonctions ln et exp :



Fonction exponentielle de base $a > 0$:
La fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est définie par : $\exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$.

Théorème des croissances comparées :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
- Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xa^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} xa^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha\,\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$.

II Equivalents

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
Si g est non nulle au voisinage de a, on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

DÉRIVATION

Définition et application :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.

- On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.
- On a alors : $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $x \mapsto$	Dérivée $x \mapsto$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivées :
Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a :

Opérations	Formules de la dérivée
Produit uv	$u'v + uv'$
Inverse $\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Réciproque f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Dérivée d'une composée et applications :
Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.
On en déduit que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

- $\left(\mathrm{e}^{u}\right)' = u'\mathrm{e}^{u}$.
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $\left(\ln\, u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.
- $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$ où $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

INTÉGRATION

Primitives fondamentales :

- $\displaystyle\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)}$.
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(|u(x)|\right)$.
- $\displaystyle\int u'(x)u^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ pour tout $\alpha \neq -1$.

Propriétés de l'intégrale :
Soient f et g deux fonctions continues sur I, a, b, c trois réels de I et α et β deux réels quelconques.

- Linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique :

- La valeur moyenne d'une fonction f T-périodique est définie par : $\displaystyle < f >= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La valeur efficace d'une fonction f T-périodique est définie par : $\displaystyle f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)\,\mathrm{d}x}$.

Intégration par parties :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ à dérivées continues sur $[a;b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode ALPES :
On dérive (passage de v à v') la première fonction trouvée (en lisant de gauche à droite) ...

Changement de variable :
Soient α et β deux réels, φ étant une fonction continûment dérivable strictement monotone sur $[\alpha;\beta]$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

INTÉGRALES IMPROPRES

I Généralités

Fonctions localement intégrables :
Toute fonction continue est localement intégrable.

Convergence d'une intégrale impropre :

Soit $[a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe et est finie. Sinon, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Point méthode pour l'étude de la convergence :
On peut avoir deux bornes d'intégration généralisées, par exemple $-\infty$ et $+\infty$, il faut impérativement couper l'intégrale et étudier séparément chaque borne.

Intégrales de Riemann :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

II Intégration de fonctions positives

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :
   Soit f une fonction positive définie sur $[a;b[$.
   $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est bornée sur $[a;b[$.
2. Comparaison de fonctions positives :
   Soient f et g deux fonctions définies sur $[a;b[$ telles que $0 \leq f \leq g$.
   - Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
   - Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.
3. Intégrales et fonctions équivalentes :
   Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a;b[$. Si, au voisinage de b, les fonctions positives f et g sont équivalentes alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

Partie entière d'une fraction rationnelle :
La partie entière de $F = \frac{P}{Q}$ s'obtient en effectuant la division de P par Q.
E est non nul si $\deg(P) \geq \deg(Q)$.
On a alors : $F = \dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{R}{Q}$ où R est le reste de la division euclidienne.

Théorème de décomposition en éléments simples :

La fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{(Q_i)^j}$$

où, pour tout $i \in \{1; 2; \cdots; r\}$ et tout $j \in \{1; 2; \cdots; \alpha_i\}$, $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$.

Dans $\mathbb{R}(X)$, comme $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$, deux cas peuvent se présenter :

- si Q_i est un polynôme du premier degré alors P_{ij} est une constante (de la forme λ).
- si Q_i est un polynôme du second degré avec $\Delta < 0$ alors P_{ij} est de la forme $\lambda x + \mu$.

Décompositon d'une fraction rationnelle avec des coefficients réels :
Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on décompose le quotient $\dfrac{R}{Q}$ sous la forme d'une somme :

- d'éléments simples de première espèce du type $\dfrac{\lambda}{(x-\alpha)^j}$ avec λ réel et j entier naturel non nul.
- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^j}$ avec λ et μ réels , j entier naturel non nul ($b^2 - 4ac < 0$).

Exemple :
Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle : $F(X) = \dfrac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 5X + 2}{X^4 + X^3 + X^2}$.

- Les deux polynômes sont de même degré donc la partie entière est non nulle.
  Après division euclidienne, on a : $F(X) = 1 + \dfrac{2X^3 + 3X^2 + 5X + 2}{X^4 + X^3 + X^2}$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, on factorise $X^4+X^3+X^2$ en $X^2(X^2+X+1)$ car X^2+X+1 a un discriminant négatif.
  Il y a donc deux polynômes irréductibles : X (de degré 1) et $X^2 + X + 1$ (de degré 2).
  Il en résulte que : $\dfrac{2X^3 + 3X^2 + 5X + 2}{X^2(X^2 + X + 1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{cX + d}{X^2 + X + 1}$.
- On obtient : $F(X) = 1 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X^2} + \dfrac{X + 2}{X^2 + X + 1}$.

I Formule de Taylor-Young

- Si la fonction f est dérivable en a jusqu'à l'ordre n alors
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

- Au voisinage de 0, on obtient :
Si f est une fonction dérivable n fois en 0 alors f peut s'écrire :
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

II DL usuels au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

I Généralités sur la résolution d'une ED

Méthode générale pour la résolution :
Soient a, b et c des fonctions définies et continues sur I.
Si y_p est une solution particulière de (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$ avec y_H solution de l'équation homogène.
Ainsi : l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$ une solution (particulière) de (E).

Principe de superposition :
Considérons une équation différentielle du type : $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.
Si, pour $i \in \{1; 2\}$, y_i est solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b_i(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution (particulière) de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Les deux théorèmes précédents s'étendent à des ED du second ordre.

II ED du 1^{er} ordre

Résolution de l'ED $y' = a(x)y$:
Les solutions sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{A(x)}$ où A est une primitive de a et C est une constante.

Méthode de séparation des variables :
(E) est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme $f(y) \times y' = g(x)$.
Si F et G sont respectivement des primitives de f et g, on obtient alors :
$F(y) = G(x) + K$ où K est une constante (réelle).

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$:
Dans un premier temps, on peut chercher une solution particulière de "même nature" que le second membre.

- Si $b(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme (souvent de même degré).
- Si $b(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\cos(\alpha x) + K'\sin(\alpha x)$.

Méthode de la variation de la constante :
Pour déterminer une solution particulière, on peut également la rechercher par la méthode de variation de la constante qui suit :
On rappelle que (E_H) : $y' + a(x)y = 0$ admet pour solution : $y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de a.
On cherche désormais y_p de la forme $y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec C fonction dérivable.
Par détermination de primitive, on trouve C puis y_p.

III Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Définition :
Une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre, à coefficients constants, est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$ay" + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et f une fonction continue sur I.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$ay" + by' + cy = 0 \quad (E_H).$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_C).$$

Solutions de l'équation homogène $ay" + by' + cy = 0$:

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes α et β.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution α.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\left(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right)$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle $ay" + by' + cy = f(x)$:
Pour chercher une solution particulière, on se contentera de chercher des solutions de même nature que le second membre $f(x)$.

TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Définition de la transformée de Laplace d'une fonction f :
Sous réserve d'existence, on a : $\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

Transformées de Laplace et dérivation :
$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(p) = p\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - f(0)$.
$\mathcal{L}\left\{f''\right\}(p) = p^2\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - pf(0) - f'(0)$.
Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Laplace
$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega\, t)\ u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega\, t)\ u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t^n\, u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\, u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$t\, f(t)\, u(t)$	$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\left\{f\right\}](p)$
$f(at)\ u(t)$	$\dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\right\}\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\, f(t)\ u(t)$	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p+a)$
$f(t-a)\, u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-a\,p}\mathcal{L}\left\{f\right\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) \times \mathcal{L}\left\{g\right\}(p)$

SUITES

Convergence et divergence des suites :
Définition :
Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Suites arithmétiques :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

Suites géométriques :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| > 1$ alors (u_n) diverge.

Suites adjacentes : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- l'une est croissante, l'autre est décroissante.
- $\lim (\ u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Suites arithmético-géométriques :
Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que :
$\forall n \geqslant 0$, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on introduit une suite auxiliaire géométrique (v_n) (dans le cas où $a \neq 1$) telle que :
$v_n = u_n - \ell$ où ℓ la solution de l'équation $\ell = a\ell + b$.
ℓ correspond à la limite éventuelle de la suite.

SÉRIES

Définition d'un série :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Le réel S_n défini par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle de rang n.
- La suite (S_n) des sommes partielles est appellée série de terme général u_n.
  On la note : $\sum u_n$ voire $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Nature des séries numériques :
On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) admet une limite finie.
Cette limite est appelée somme de la série.
On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Condition nécessaire de convergence :
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Attention, la condition n'est pas suffisante.
Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Nature de séries fondamentales :

- Séries géométriques : La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
  Lorsque $|q| < 1$, on a l'égalité :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$
- Séries de Riemann : La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Opérations avec les séries :
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes et si a et b sont des réels alors la série $\sum(au_n + bv_n)$ est convergente. On pourra donc écrire : $\sum(au_n + bv_n) = a\sum u_n + b\sum v_n$.

Séries à termes positifs :

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :
   Une série $\sum u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.
2. Comparaisons de séries à termes positifs :
   Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0.
   - Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
   - Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Séries et équivalents : Considérons deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.
   Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Convergence absolue :
La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

SÉRIES DE FOURIER

I Théorème de Dirichlet :

Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T-périodique alors la série de Fourier converge vers la régularisée de f. Ainsi :

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(k\omega t\right) + b_k \sin\left(k\omega t\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

II Coefficients réels et séries de Fourier

Définition :

- $a_0 =< f >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \mathrm{d}t.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\ \mathrm{d}t.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\ \mathrm{d}t.$

Propriété :

- Si f est paire alors, pour tout entier n non nul, $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\ \mathrm{d}t.$
- Si f est impaire alors, pour tout entier n non nul, $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\ \mathrm{d}t.$

III Coefficients complexes et séries de Fourier

Propriété :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega t}\ \mathrm{d}t$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2} = \bar{c_n}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = j(c_n - c_{-n})$

IV Égalité de Bessel-Parseval

$$< f^2 >= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

V Taux de distorsion

Le taux de distorsion est défini par $D = \dfrac{\text{Valeur efficace des harmoniques}}{\text{Valeur efficace du fondamental}} = \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{a_1^2 + b_1^2}}.$

TRANSFORMÉES DE FOURIER

I Généralités

La transformée de Fourier d'une fonction f est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

II Propriétés

- Si f est paire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = 2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ est réelle.
- Si f est impaire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = -2j\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ est imaginaire pure.
- La transformée de Fourier conserve la parité.
- La transformée de Fourier est linéaire. Pour tous réels a et b, pour toutes fonctions f et g admettant une transformée de Fourier, on a :

$$\mathcal{F}\left(af(t)+bg(t)\right)(\omega) = a\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) + b\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\omega)$$

- **Lien avec la transformée de Laplace (Cas d'un signal causal)**

$$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega) = \mathcal{L}\left(f\right)(j\omega)$$

- Transformées usuelles :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Fourier
$f(t-\tau)$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$
$f(t)\,\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega-\omega_0)$
$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)$
$\delta(t)$	1
$(f * g)(t)$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)\cdot\mathcal{F}\left(g\right)(\omega)$

III Autour de l'impulsion et du produit de convolution

Propriété de l'impulsion : $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t-x)\,\mathrm{d}t$ donc $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t)\,\mathrm{d}t$.

Produit de convolution des fonctions f et g : $(f*g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.

Relation entre signal d'entrée u_e et signal de sortie u_s :

$$u_s = h * u_e \quad \text{ie} \quad u_s(t) = (h*u_e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-x)\cdot u_e(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\cdot u_e(t-x)\,\mathrm{d}x$$

On a donc

$$\mathcal{F}\left(u_s\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(h\right)(\omega)\cdot\mathcal{F}\left(u_e\right)(\omega)$$

TRANSFORMÉES EN $\mathcal{Z}$

La transformation en $\mathcal{Z}$ est une application qui transforme une suite $f = \{f(nT_e)\}$ (définie sur $\mathbb{N}$) en une fonction $F : z \mapsto \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}$ d'une variable complexe telle que :

$$\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n} \text{ converge}\}.$$

Terme général de la suite $\{f(nT_e)\}$	**Expression de la transformée en $\mathcal{Z}$**
$\delta(nT_e)$	1
$u(nT_e)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$nT_e.u(nT_e)$	$\dfrac{zT_e}{(z-1)^2}$
$a^{nT_e}.u(nT_e)$	$\dfrac{z}{z-a^{T_e}}$
$\cos(\omega nT_e).u(nT_e)$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$
$\sin(\omega nT_e).u(nT_e)$	$\dfrac{z\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$

Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$:

- $\mathcal{Z}\{f([n-m]T_e)\}(z) = z^{-m}\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\{f([n+1]T_e)\}(z) = z[\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) - f(0)]$ et
  $\mathcal{Z}\{f([n+2]T_e)\}(z) = z^2\left[\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) - f(0) - \dfrac{1}{z}f(T_e)\right]$.
- $\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\}(z) = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\{nT_e f(nT_e)\}(z) = -zT_e F'(z)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\{x \star y\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) \times \mathcal{Z}\{y\}(z)$.

Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{z\to+\infty} \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = f(0)$.

Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nT_e) = \lim\limits_{z\to1}(z-1)\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.

I Statistique univariée

Soit $(x_i ; n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n$.
La moyenne (pondérée) de la série est le réel noté $\overline{x}$ défini par :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

La variance de cette série est définie par :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \overline{x}^2$$

Le réel σ_X est appelé écart-type de la série (x_i).
Le réel $SCE_X = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ est appelé Somme des Carrés des écarts (à la moyenne). On note :

$$\sigma_X^2 = \frac{SCE_X}{n}$$

II Statistique bivariée

La covariance de X et Y est le réel, noté $\mathbb{C}ov\left(X, Y\right)$ voire σ_{XY}, telle que :

$$\mathbb{C}ov\left(X, Y\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$$

Une équation de la droite d'ajustement de Y en X est donc $Y = aX + b$ avec

$$a = \frac{\mathbb{C}ov\left(X, Y\right)}{\mathbb{V}(X)} \text{ et } b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Le coefficient de corrélation R d'une série statistique à deux variables X et Y vérifie :

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$

Le coefficient de détermination R^2 d'une série statistique à deux variables X et Y vérifie :

$$R^2 = \frac{SCE_{\text{exp}}}{SCE_{\text{totale}}}$$

Il correspond ainsi à la part de variabilité de Y expliquée par la régression.

On a la relation :

$$SCE_{\text{totale}} = SCE_{\text{exp}} \ + \ SCE_{\text{res}}$$

soit

$$SCE_Y = SCE_{\hat{Y}} \ + \ SCE_{\text{res}}$$

**PROBABILITÉS ET
STATISTIQUES INFÉRENTIELLES**

I Conditionnement et indépendance

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω, on a :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et B un événement de probabilité non nulle.

On appelle probabilité de A sachant B le nombre, noté $\mathbb{P}_B(A)$, défini par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire, A et B étant deux événements.
A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

II Espérance, variance et covariance

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots$.
L'**espérance** de X est le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Théorème de transfert :
Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$. et φ une fonction définie sur $\varphi(X(\Omega))$. On a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots$.
La **variance** de X est le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux réels. On a :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a\mathbb{V}(X)$$

On a : $\sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X)$.

Espérance d'une somme de variables aléatoires
Considérons un couple de variables aléatoires $(X;Y)$ admettant une espérance et une variance.
On a :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$$

Covariance de deux variables
La covariance de deux variables aléatoires X et Y, notée $\mathbb{C}ov(X,Y)$ est définie par :

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est telle que :

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$$

Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes
Soient X et Y deux variables aléatoires. On a

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}ov(X,Y)$$

En outre, si X et Y sont indépendantes alors

$$\mathbb{V}\,(X+Y) = \mathbb{V}\,(X) + \mathbb{V}\,(Y)$$

III Lois usuelles discrètes

Si X suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in [\![0;n]\!]$$

$$\mathbb{E}\,(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\,(X) = np\,(1-p) = npq$$

Si X suit la loi de **Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\mathbb{P}\,(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}\,(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\,(X) = \lambda$$

IV Variables aléatoires continues

On appelle fonction densité de probabilité, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que :
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en quelques valeurs) ;
- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- $\mathbb{P}\,(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ et $\mathbb{P}\,(X > b) = 1 - F_X(b)$.
- La fonction F_X est croisante sur $\mathbb{R}$ et $0 \leq F_X \leq 1$.

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f.

- L'espérance de X est le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

- La variance de X est le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

  où $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

V Lois normales

Si X est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors :
$X^\star = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ appelée loi normale centrée réduite.

Propriétést de la loi normale centrée réduite :
Pour tout réel x positif, on a :

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$$

Pour tout réel x positif, on a :

$$\mathbb{P}(-x \leq U \leq x) = 2\Phi(x) - 1$$

VI Lois exponentielles

Une loi de probabilité est exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité de probabilité est la fonction f définie sur par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ et a un réel positif. On a :

$$\mathbb{P}(X < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

Ainsi, la fonction de répartition F d'une loi exponentielle de paramètre λ peut être définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété d'absence de mémoire :
Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ,
s et t étant deux réels positifs. On a :

$$\mathbb{P}_{(X>s)}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)$$

VII Estimation

La variable $\hat{S^2} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ est un estimateur non biaisé de σ^2.

$\hat{s^2}$ est donc une estimation ponctuelle de la variance μ. On note :

$$\hat{\sigma^2} = \hat{s^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{SCE_X}{n-1}$$

Théorème Central Limite (TCL) :
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.), d'espérance μ et d'écart type σ. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$.
(S_n^*) converge (en loi) vers une variable aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.), d'espérance μ et d'écart type σ.
$\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge (en loi) vers une variable aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

En pratique, pour $n \geq 30$, on pourra noter :
$\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$ voire $\bar{X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
Soit (X_n) une suite de variables distribuées suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On a :

$$\frac{F - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \overset{\mathcal{L}}{\hookrightarrow} X \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0;1)$$

Loi de Student :
Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. On a :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \hookrightarrow \mathcal{T}(n-1)$$

Intervalle de confiance d'une moyenne :
Lorsque $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ avec σ connu, une estimation par intervalle de confiance de μ, au niveau de confiance $1-\alpha$, est donnée par :

$$\left[\overline{x} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

VIII Fiabilité

Fonction de fiabilité :
La fonction de fiabilité notée R est définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t)$$

$R(t) = \mathbb{P}(T \geq t)$ correspond à la probabilité que le dispositif fonctionne à l'instant t.

Fonction de défaillance :
La fonction de défaillance notée F est définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$$

$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ correspond à la probabilité que le dispositif soit en panne à l'instant t (durée de vie inférieure à t).
F correspond à la fonction de répartition de T.
Pour tout t positif, on a : $R(t) = 1 - F(t)$.

Durée de vie moyenne :
La durée de vie moyenne se note **MTBF** (Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement) voire MTTF (Mean Time To Failure). Elle correspond à :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} t\, f(t) \;\mathrm{d}t$$