Mémento de Mathématiques pour le GEII

Année universitaire 2017-2018

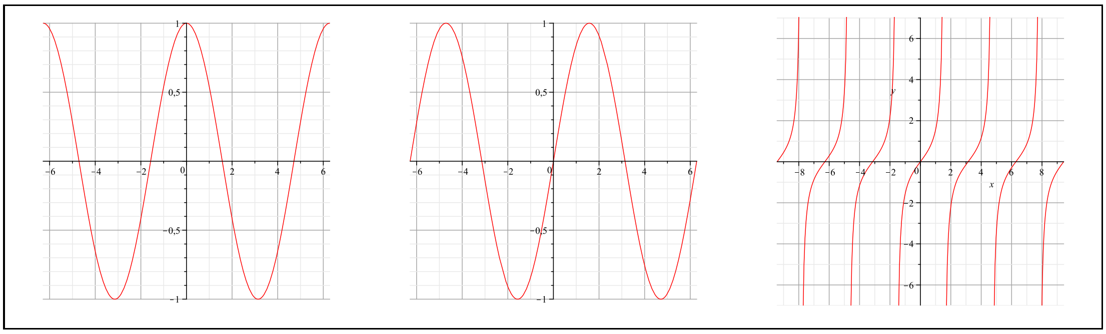
Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

FONCTIONS CIRCULAIRES ET TRIGONOMETRIE

I Fonctions circulaires

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1; 1]$.
- Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques.
- sin est impaire et cos est paire.
- La fonction Tangente est définie par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
  Elle est π-périodique.

Courbes des fonctions cos, sin et tan :



Périodicité :
Lorsque $\omega > 0$ les fonctions du type $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

II Formules de Trigonométrie

Relations liés au cercle trigonométrique :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Formules d'addition et duplication :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Formules de réduction du carré :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Formules de développement :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \qquad \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b \qquad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b.$$

Formules de factorisation :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \qquad \cos a \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.$$

Transformation de sommes en produits :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}.$$

Résolution d'équations trigonométriques :

- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a\,[2\pi]$ ou $b = -a\,[2\pi]$.
- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a\,[2\pi]$ ou $b = \pi - a\,[2\pi]$.

Transformation d'une expression du type a$\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$:

$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\left\{\begin{array}{l} a = A\sin\varphi \\ b = A\cos\varphi \end{array}\right.$.

III Linéarisation

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{j\theta}-\mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^k\, b^{n-k} \text{ où } \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Les coefficients binomiaux $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ peuvent se retrouver en utilisant le triangle de Pascal.

I Module et arguments

Soient $z = a + jb$ (de module ρ et d'argument θ) et z' deux nombres complexes non nuls.

Détermination du module et d'un argument :

$$z = \rho\,(\cos\theta + j\sin\theta) = \rho\,\mathrm{e}^{j\theta} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} \end{array}\right. .$$

Lorsque a est non nul, on a : $\tan\theta = \frac{b}{a}$ donc $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k\pi$ avec $k = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & a > 0 \\ 1 & \text{si} & a < 0 \end{array}\right.$.

Propriétés du module et d'un argument :

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$.
  On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ $[2\pi]$.
- $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ $[2\pi]$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$.
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$ ou $\arg(z) = 0$ $[\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

II Equations

Racines carrées d'un complexe non réel :
Un nombre complexe non nul $Z = A + jB$ admet deux racines carrées de la forme $z = a + jb$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2 - b^2 & = & A \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} \\ 2\,a\,b & = & B \end{array}\right. .$$

Equation du second degré :

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si Δ est non nul alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines distinctes :
  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ.

Racines n-ièmes de l'unité :
Soit n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2jk\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; .....; n-1\}$.

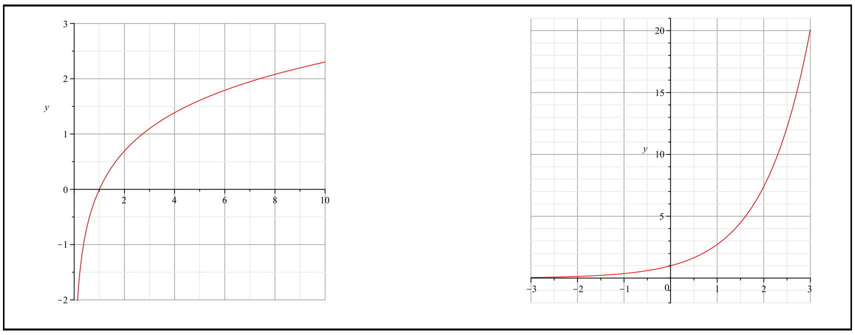
I Autour de $\ln$ et $\exp$

Propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$:
Soient a et b deux réels strictement positifs.
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall p \in \mathbb{R}$, $\ln(a^p) = p\ln(a)$.

Soient a et b deux réels.
- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
- $\forall n \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Lien entre $\ln$ et $\exp$:
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- $\forall y > 0$, on a : $\mathrm{e}^{\ln y} = y$.

Courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$:



Fonction exponentielle de base $a > 0$:
La fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est définie par : $\exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$.

Théorème des croissances comparées :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
- Si $a > 1$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xa^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} xa^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha\,\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$.

II Equivalents

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
On dit que f est équivalente à g en a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction ε définie sur V telle que : $\forall x \in V, f(x) = (1 + \varepsilon(x))\,g(x)$ avec $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$.
Si g est non nulle au voisinage de a, on a :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Définition et application :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.
- On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.
- On a alors : $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $x \mapsto$	Dérivée $x \mapsto$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivées :
Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a :

Opérations	Formules de la dérivée
Produit uv	$u'v + uv'$
Inverse $\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Réciproque f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Dérivée d'une composée et applications :
Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.
On en déduit que :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.

Primitives fondamentales :

- $\displaystyle\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)}$.
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left(|u(x)|\right)$.
- $\displaystyle\int u'(x)u^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ pour tout $\alpha \neq -1$.

Propriétés de l'intégrale :
Soient f et g deux fonctions continues sur I, a, b, c trois réels de I et α et β deux réels quelconques.

- Linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique :

- La valeur moyenne d'une fonction f T-périodique est définie par : $\displaystyle < f >= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La valeur efficace d'une fonction f T-périodique est définie par : $\displaystyle f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)\,\mathrm{d}x}$.

Intégration par parties :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ à dérivées continues sur $[a;b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode ALPES :
On dérive (passage de v à v') la première fonction trouvée (en lisant de gauche à droite) ...

Changement de variable :
Soient α et β deux réels, φ étant une fonction continûment dérivable strictement monotone sur $[\alpha;\beta]$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

I Généralités

Fonctions localement intégrables :
Toute fonction continue est localement intégrable.

Convergence d'une intégrale impropre :

Soit $[a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f$ converge si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe et est finie. Sinon, on dit que $\int_a^b f$ diverge.

Point méthode pour l'étude de la convergence :
On peut avoir deux bornes d'intégration généralisées, par exemple $-\infty$ et $+\infty$, il faut impérativement couper l'intégrale et étudier séparément chaque borne.

Intégrales de Riemann :

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

II Intégration de fonctions positives

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :
   Soit f une fonction positive définie sur $[a;b[$.
   $\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est bornée sur $[a;b[$.
2. Comparaison de fonctions positives :
   Soient f et g deux fonctions définies sur $[a;b[$ telles que $0 \leq f \leq g$.
   - Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
   - Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.
3. Intégrales et fonctions équivalentes :
   Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a;b[$. Si, au voisinage de b, les fonctions positives f et g sont équivalentes alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

Partie entière d'une fraction rationnelle :
La partie entière de $F = \frac{P}{Q}$ s'obtient en effectuant la division de P par Q.
E est non nul si $\deg(P) \geq \deg(Q)$.
On a alors : $F = \dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{R}{Q}$ où R est le reste de la division euclidienne.

Théorème de décomposition en éléments simples :

La fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{(Q_i)^j}$$

où, pour tout $i \in \{1; 2; \cdots; r\}$ et tout $j \in \{1; 2; \cdots; \alpha_i\}$, $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$.

Dans $\mathbb{R}(X)$, comme $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$, deux cas peuvent se présenter :
- si Q_i est un polynôme du premier degré alors P_{ij} est une constante (de la forme λ).
- si Q_i est un polynôme du second degré avec $\Delta < 0$ alors P_{ij} est de la forme $\lambda x + \mu$.

Décompositon d'une fraction rationnelle avec des coefficients réels :
Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on décompose le quotient $\dfrac{R}{Q}$ sous la forme d'une somme :
- d'éléments simples de première espèce du type $\dfrac{\lambda}{(x-\alpha)^j}$ avec λ réel et j entier naturel non nul.
- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^j}$ avec λ et μ réels , j entier naturel non nul ($b^2 - 4ac < 0$).

Exemple :
Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle : $F(X) = \dfrac{X^4+3X^3+4X^2+5X+2}{X^4+X^3+X^2}$.

- Les deux polynômes sont de même degré donc la partie entière est non nulle.
  Après division euclidienne, on a : $F(X) = 1 + \dfrac{2X^3+3X^2+5X+2}{X^4+X^3+X^2}$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, on factorise $X^4+X^3+X^2$ en $X^2(X^2+X+1)$ car X^2+X+1 a un discriminant négatif.
  Il y a donc deux polynômes irréductibles : X (de degré 1) et X^2+X+1 (de degré 2).
  Il en résulte que : $\dfrac{2X^3+3X^2+5X+2}{X^2(X^2+X+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$.
- On obtient : $F(X) = 1 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X^2} + \dfrac{X+2}{X^2+X+1}$.

I Formule de Taylor-Young

- Si la fonction f est dérivable en a jusqu'à l'ordre n alors
  $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.
- Au voisinage de 0, on obtient :
  Si f est une fonction dérivable n fois en 0 alors f peut s'écrire :
  $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

II DL usuels au voisinage de 0

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

I Généralités sur la résolution d'une ED

Méthode générale pour la résolution :
Soient a, b et c des fonctions définies et continues sur I.
Si y_p est une solution particulière de $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$ alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$ avec y_H solution de l'équation homogène.
Ainsi : l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de $(E_H) : a(x)y' + b(x)y = 0$ une solution (particulière) de (E).

Principe de superposition :
Considérons une équation différentielle du type : $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.
Si, pour $i \in \{1; 2\}$, y_i est solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b_i(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution (particulière) de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Les deux théorèmes précédents s'étendent à des ED du second ordre.

II ED du 1^{er} ordre

Résolution de l'ED $y' = a(x)y$:
Les solutions sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{A(x)}$ où A est une primitive de a et C est une constante.

Méthode de séparation des variables :
(E) est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme $f(y) \times y' = g(x)$.
Si F et G sont respectivement des primitives de f et g, on obtient alors :
$F(y) = G(x) + K$ où K est une constante (réelle).

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$:
Dans un premier temps, on peut chercher une solution particulière de "même nature" que le second membre.

- Si $b(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme (souvent de même degré).
- Si $b(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\cos(\alpha x) + K'\sin(\alpha x)$.

Méthode de la variation de la constante :
Pour déterminer une solution particulière, on peut également la rechercher par la méthode de variation de la constante qui suit :
On rappelle que $(E_H) : y' + a(x)y = 0$ admet pour solution : $y_H : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où A est une primitive de a.
On cherche désormais y_p de la forme $y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec C fonction dérivable.
Par détermination de primitive, on trouve C puis y_p.

III Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Définition :
Une équation différentielle linéaire du 2nd ordre, à coefficients constants, est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$ay" + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et f une fonction continue sur I.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$ay" + by' + cy = 0 \quad (E_H).$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_C).$$

Solutions de l'équation homogène $ay" + by' + cy = 0$:
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes α et β.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution α.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\,(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x))$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle $ay" + by' + cy = f(x)$:
Pour chercher une solution particulière, on se contentera de chercher des solutions de même nature que le second membre $f(x)$.

Définition de la transformée de Laplace d'une fonction f :
Sous réserve d'existence, on a : $\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

Transformées de Laplace et dérivation :
$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0)$.
$\mathcal{L}\{f''\}(p) = p^2\mathcal{L}\{f\}(p) - pf(0) - f'(0)$.
Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	**Expression de la transformée de Laplace**
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\ u(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n\,u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t\,f(t)\,u(t)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\{f\}](p)$
$f(at)\ u(t)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{p}{a}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\,f(t)\ u(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(p+a)$
$f(t-a)\,u(t-a)$	$\mathrm{e}^{-a\,p}\mathcal{L}\{f\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\{f\}(p) \times \mathcal{L}\{g\}(p)$

Convergence et divergence des suites :
Définition :
Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Suites arithmétiques :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

Suites géométriques :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| > 1$ alors (u_n) diverge.

Suites adjacentes : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
- l'une est croissante, l'autre est décroissante.
- $\lim(\ u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Suites arithmético-géométriques :
Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que :
$\forall n \geqslant 0$, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on introduit une suite auxiliaire géométrique (v_n) (dans le cas où $a \neq 1$) telle que :
$v_n = u_n - \ell$ où ℓ la solution de l'équation $\ell = a\ell + b$.
ℓ correspond à la limite éventuelle de la suite.

Définition d'un série :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Le réel S_n défini par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle de rang n.
- La suite (S_n) des sommes partielles est appellée série de terme général u_n.
  On la note : $\sum u_n$ voire $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Nature des séries numériques :
On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) admet une limite finie.
Cette limite est appelée somme de la série.
On note : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Condition nécessaire de convergence :
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Attention, la condition n'est pas suffisante.
Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Nature de séries fondamentales :

- Séries géométriques : La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
  Lorsque $|q| < 1$, on a l'égalité :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$
- Séries de Riemann : La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Opérations avec les séries :
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes et si a et b sont des réels alors la série $\sum(au_n+bv_n)$ est convergente. On pourra donc écrire : $\sum(au_n + bv_n) = a\sum u_n + b\sum v_n$.

Séries à termes positifs :

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :
   Une série $\sum u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

2. Comparaisons de séries à termes positifs :
   Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0.
   - Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
   - Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

3. Séries et équivalents : Considérons deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.
   Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Convergence absolue :
La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a :
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

I Théorème de Dirichlet :

Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T-périodique alors la série de Fourier converge vers la régularisée de f. Ainsi :

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(k\omega t\right) + b_k \sin\left(k\omega t\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

II Coefficients réels et séries de Fourier

Définition :

- $a_0 = < f >= \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$

Propriété :

- Si f est paire alors, pour tout entier n non nul, $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$
- Si f est impaire alors, pour tout entier n non nul, $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$

III Coefficients complexes et séries de Fourier

Propriété :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2} = \bar{c_n}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = j(c_n - c_{-n})$

IV Égalité de Bessel-Parseval

$$< f^2 >= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

V Taux de distorsion

Le taux de distorsion est défini par $D = \dfrac{\text{Valeur efficace des harmoniques}}{\text{Valeur efficace du fondamental}} = \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)}{a_1^2}}.$

I Généralités

La transformée de Fourier d'une fonction f est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

II Propriétés

- Si f est paire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ est réelle.
- Si f est impaire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = -2j\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$ est imaginaire pure.
- La transformée de Fourier conserve la parité.
- La transformée de Fourier est linéaire. Pour tous réels a et b, pour toutes fonctions f et g admettant une transformée de Fourier, on a :

$$\mathcal{F}\left(af(t) + bg(t)\right)(\omega) = a\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) + b\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\omega)$$

- **Lien avec la transformée de Laplace (Cas d'un signal causal)**

$$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega) = \mathcal{L}\left(f\right)(j\omega)$$

- Transformées usuelles :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Fourier
$f(t-\tau)$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$
$f(t)\,\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega-\omega_0)$
$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)$
$\delta(t)$	1
$(f * g)(t)$	$\mathcal{F}\left(f\right)(\omega)\cdot\mathcal{F}\left(g\right)(\omega)$

III Autour de l'impulsion et du produit de convolution

Propriété de l'impulsion : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t-x)\,\mathrm{d}t$ donc $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t)\,\mathrm{d}t$.

Produit de convolution des fonctions f et g : $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.

Relation entre signal d'entrée u_e et signal de sortie u_s :

$$u_s = h * u_e \quad \text{ie} \quad u_s(t) = (h*u_e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-x)\cdot u_e(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\cdot u_e(t-x)\,\mathrm{d}x$$

On a donc

$$\mathcal{F}\left(u_s\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(h\right)(\omega)\cdot\mathcal{F}\left(u_e\right)(\omega)$$

I Rayon de convergence

Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est tel que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Soit f une fonction C^∞ (continue et infiniment dérivable) sur $]-a;a[$.

II Développement en série entière

Soit f une fonction infiniment dérivable sur $]-R,R[$.
S'il existe $M > 0$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$ pour tout $x \in]-R,R[$, alors f admet un développement en série entière, de rayon R.
On dit alors que f est développable par sa série de Mac Laurin et on a, pour tout $x \in]-R,R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

III Application aux développements usuels

Expression de la fonction	**DSE**	**Rayon de CV**
e^x	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\sin(x)$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos(x)$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\arctan(x)$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$

TRANSFORMÉES EN $\mathcal{Z}$

La transformation en $\mathcal{Z}$ est une application qui transforme une suite $f = \{f(nT_e)\}$ (définie sur $\mathbb{N}$) en une fonction $F : z \mapsto \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}$ d'une variable complexe telle que :

$$\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n} \text{ converge}\}.$$

Terme général de la suite $\{f\left(nT_e\right)\}$	**Expression de la transformée en $\mathcal{Z}$**
$\delta\left(nT_e\right)$	1
$u\left(nT_e\right)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$nT_e.u\left(nT_e\right)$	$\dfrac{zT_e}{\left(z-1\right)^2}$
$a^{nT_e}.u\left(nT_e\right)$	$\dfrac{z}{z-a^{T_e}}$
$\cos\left(\omega nT_e\right).u\left(nT_e\right)$	$\dfrac{z^2 - z\cos\left(\omega T_e\right)}{z^2 - 2z\cos\left(\omega T_e\right)+1}$
$\sin\left(\omega nT_e\right).u\left(nT_e\right)$	$\dfrac{z\sin\left(\omega T_e\right)}{z^2 - 2z\cos\left(\omega T_e\right)+1}$

Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$:

- $\mathcal{Z}\left\{f\left([n-m]T_e\right)\right\}(z) = z^{-m}\mathcal{Z}\left\{f\left(nT_e\right)\right\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\left\{f\left([n+1]T_e\right)\right\}(z) = z\left[\mathcal{Z}\left\{f\left(nT_e\right)\right\}(z) - f(0)\right]$ et
  $\mathcal{Z}\left\{f\left([n+2]T_e\right)\right\}(z) = z^2\left[\mathcal{Z}\left\{f\left(nT_e\right)\right\}(z) - f(0) - \frac{1}{z}f\left(T_e\right)\right]$.
- $\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\}(z) = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\left\{nT_e f(nT_e)\right\}(z) = -zT_e F'(z)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.
- $\mathcal{Z}\{x \star y\} = \mathcal{Z}\{x\}\mathcal{Z}\{y\}$.

Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{z\to+\infty} \mathcal{Z}\left\{f(nT_e)\right\}(z) = f(0)$.

Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nT_e) = \lim\limits_{z\to1}(z-1)\mathcal{Z}\left\{f(nT_e)\right\}(z)$.