

Mémento de Mathématiques pour le GEII

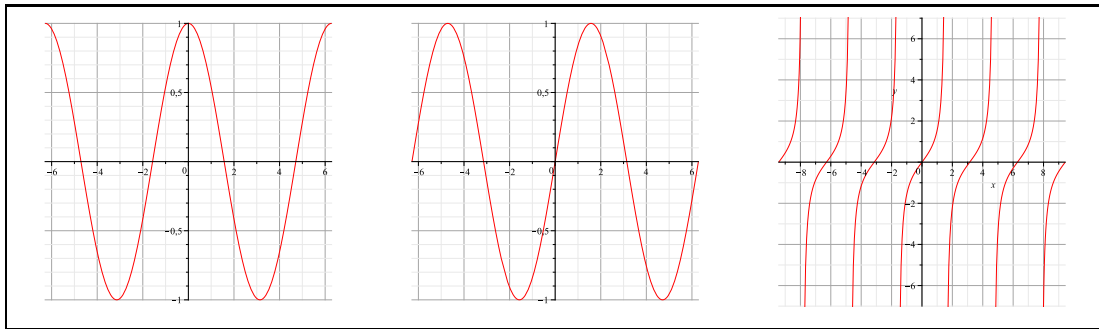
Année universitaire 2017-2018

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : <http://flarnal.e-monsite.com>

I Fonctions circulaires

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1; 1]$.
- Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques.
- sin est impaire et cos est paire.
- La fonction Tangente est définie par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Elle est π -périodique.

Courbes des fonctions cos, sin et tan :



Périodicité :

Lorsque $\omega > 0$ les fonctions du type $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

II Formules de Trigonométrie

Relations liés au cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{lll}
 \sin(-\theta) = -\sin \theta & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta & \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\
 \cos(-\theta) = \cos \theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta & \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\
 \tan(-\theta) = -\tan \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} & \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta
 \end{array}$$

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Formules d'addition et duplication :

$$\begin{array}{ll}
 \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
 \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
 \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. &
 \end{array}$$

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$

Formules de réduction du carré :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Formules de développement :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b & \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b & \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Formules de factorisation :

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} & \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} & \cos a \sin b &= \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}. \end{aligned}$$

Transformation de sommes en produits :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

Résolution d'équations trigonométriques :

- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b = -a [2\pi].$
- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b = \pi - a [2\pi].$

Transformation d'une expression du type $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$:

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} a = A \sin \varphi \\ b = A \cos \varphi \end{cases}.$$

III Linéarisation

Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ peuvent se retrouver en utilisant le triangle de Pascal.

I Module et arguments

Soient $z = a + jb$ (de module ρ et d'argument θ) et z' deux nombres complexes non nuls.

Détermination du module et d'un argument :

$$z = \rho (\cos \theta + j \sin \theta) = \rho e^{j\theta} \text{ avec } \begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} \end{cases}.$$

Lorsque a est non nul, on a : $\tan \theta = \frac{b}{a}$ donc $\theta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) + k\pi$ avec $k = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$.

Propriétés du module et d'un argument :

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $|zz'| = |z| |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$.
- $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$.
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) [2\pi]$.
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ ou $\arg(z) = 0 [\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

II Equations

Racines carrées d'un complexe non réel :

Un nombre complexe non nul $Z = A + jB$ admet deux racines carrées de la forme $z = a + jb$ telles que :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= A \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ 2ab &= B \end{cases}.$$

Equation du second degré :

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si Δ est non nul alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines distinctes :
 $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ .

Racines n-ièmes de l'unité :

Soit n un entier naturel non nul.

L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes de la forme $e^{\frac{2jk\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$.

I Autour de $\ln$ et $\exp$

Propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$:

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall p \in \mathbb{R}, \ln(a^p) = p \ln(a)$.

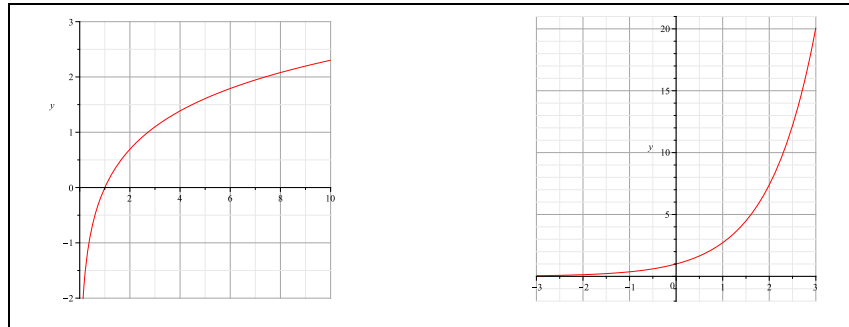
Soient a et b deux réels.

- $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- $\forall n \in \mathbb{R}, (e^a)^n = e^{na}$.

Lien entre $\ln$ et $\exp$:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{on a : } \ln(e^x) = x$.
- $\forall y > 0, \text{on a : } e^{\ln y} = y$.

Courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$:



Fonction exponentielle de base $a > 0$:

La fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$, est définie par : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Théorème des croissances comparées :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Si $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

II Equivalents

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

On dit que f est équivalente à g en a , noté $f \sim_a g$ s'il existe une fonction ε définie sur V telle que : $\forall x \in V, f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x)$ avec $\lim_a \varepsilon = 0$.

Si g est non nulle au voisinage de a , on a :

$$f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

DÉRIVATION

Définition et application :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

- On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.
- On a alors : $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $x \mapsto$	Dérivée $x \mapsto$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1; 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivées :

Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a :

Opérations	Formules de la dérivée
Produit uv	$u'v + uv'$
Inverse $\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Réciproque f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Dérivée d'une composée et applications :

Sous réserve d'existence et de dérivabilité, on a : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

On en déduit que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Primitives fondamentales :

- $\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)}.$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(|u(x)|).$
- $\int u'(x)u^\alpha(x) dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ pour tout $\alpha \neq -1.$

Propriétés de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur I , a, b, c trois réels de I et α et β deux réels quelconques.

- Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$

Valeurs moyenne et efficace d'un signal périodique :

- La valeur moyenne d'une fonction f T -périodique est définie par : $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$
- La valeur efficace d'une fonction f T -périodique est définie par : $f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx}.$

Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ à dérivées continues sur $[a; b].$

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Méthode ALPES :

On dérive (passage de v à v') la première fonction trouvée (en lisant de gauche à droite) ...

Changement de variable :

Soient α et β deux réels, φ étant une fonction continûment dérivable strictement monotone sur $[\alpha; \beta]$ et f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b.$ On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

I Généralités

Fonctions localement intégrables :

Toute fonction continue est localement intégrable.

Convergence d'une intégrale impropre :

Soit $[a; b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f$ converge si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$

existe et est finie. Sinon, on dit que $\int_a^b f$ diverge.

Point méthode pour l'étude de la convergence :

On peut avoir deux bornes d'intégration généralisées, par exemple $-\infty$ et $+\infty$, il faut impérativement couper l'intégrale et étudier séparément chaque borne.

Intégrales de Riemann :

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

II Intégration de fonctions positives

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :

Soit f une fonction positive définie sur $[a; b[$.

$\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est bornée sur $[a; b[$.

2. Comparaison de fonctions positives :

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b[$ telles que $0 \leq f \leq g$.

- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.
- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

3. Intégrales et fonctions équivalentes :

Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a; b[$. Si, au voisinage de b , les fonctions

positives f et g sont équivalentes alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

DECOMPOSITION EN ELEMENTS
SIMPLES

Partie entière d'une fraction rationnelle :

La partie entière de $F = \frac{P}{Q}$ s'obtient en effectuant la division de P par Q .
 E est non nul si $\deg(P) \geq \deg(Q)$.

On a alors : $F = \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où R est le reste de la division euclidienne.

Théorème de décomposition en éléments simples :

La fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{(Q_i)^j}$$

où, pour tout $i \in \{1; 2; \dots; r\}$ et tout $j \in \{1; 2; \dots; \alpha_i\}$, $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$.

Dans $\mathbb{R}(X)$, comme $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$, deux cas peuvent se présenter :

- si Q_i est un polynôme du premier degré alors P_{ij} est une constante (de la forme λ).
- si Q_i est un polynôme du second degré avec $\Delta < 0$ alors P_{ij} est de la forme $\lambda x + \mu$.

Décomposition d'une fraction rationnelle avec des coefficients réels :

Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on décompose le quotient $\frac{R}{Q}$ sous la forme d'une somme :

- d'éléments simples de première espèce du type $\frac{\lambda}{(x - \alpha)^j}$ avec λ réel et j entier naturel non nul.
- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^j}$ avec λ et μ réels, j entier naturel non nul ($b^2 - 4ac < 0$).

Exemple :

Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle : $F(X) = \frac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 5X + 2}{X^4 + X^3 + X^2}$.

- Les deux polynômes sont de même degré donc la partie entière est non nulle.

Après division euclidienne, on a : $F(X) = 1 + \frac{2X^3 + 3X^2 + 5X + 2}{X^4 + X^3 + X^2}$.

- Dans $\mathbb{R}[X]$, on factorise $X^4 + X^3 + X^2$ en $X^2(X^2 + X + 1)$ car $X^2 + X + 1$ a un discriminant négatif.

Il y a donc deux polynômes irréductibles : X (de degré 1) et $X^2 + X + 1$ (de degré 2).

Il en résulte que : $\frac{2X^3 + 3X^2 + 5X + 2}{X^2(X^2 + X + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$.

- On obtient : $F(X) = 1 + \frac{1}{X} + \frac{2}{X^2} + \frac{X + 2}{X^2 + X + 1}$.

I Formule de Taylor-Young

- Si la fonction f est dérivable en a jusqu'à l'ordre n alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$
- Au voisinage de 0, on obtient :
 Si f est une fonction dérivable n fois en 0 alors f peut s'écrire :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

II DL usuels au voisinage de 0

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

I Généralités sur la résolution d'une ED

Méthode générale pour la résolution :

Soient a , b et c des fonctions définies et continues sur I .

Si y_p est une solution particulière de $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$ alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$ avec y_H solution de l'équation homogène.

Ainsi : l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de $(E_H) : a(x)y' + b(x)y = 0$ une solution (particulière) de (E) .

Principe de superposition :

Considérons une équation différentielle du type : $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Si, pour $i \in \{1; 2\}$, y_i est solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b_i(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution (particulière) de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Les deux théorèmes précédents s'étendent à des ED du second ordre.

II ED du 1^{er} ordre

Résolution de l'ED $y' = a(x)y$:

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{A(x)}$ où A est une primitive de a et C est une constante.

Méthode de séparation des variables :

(E) est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme $f(y) \times y' = g(x)$.

Si F et G sont respectivement des primitives de f et g , on obtient alors :

$F(y) = G(x) + K$ où K est une constante (réelle).

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$:

Dans un premier temps, on peut chercher une solution particulière de "même nature" que le second membre.

- Si $b(x) = Ae^{\alpha x}$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Ke^{\alpha x}$.
- Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme (souvent de même degré).
- Si $b(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K \cos(\alpha x) + K' \sin(\alpha x)$.

Méthode de la variation de la constante :

Pour déterminer une solution particulière, on peut également la rechercher par la méthode de variation de la constante qui suit :

On rappelle que $(E_H) : y' + a(x)y = 0$ admet pour solution : $y_H : x \mapsto Ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de a .

On cherche désormais y_p de la forme $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$ avec C fonction dérivable.

Par détermination de primitive, on trouve C puis y_p .

III Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Définition :

Une équation différentielle linéaire du 2nd ordre, à coefficients constants, est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et f une fonction continue sur I .

On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_H).$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_C).$$

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$:

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes α et β .
Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution α .
Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^{\alpha x}$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$.
Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto e^{\lambda x} (A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x))$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Recherche de solutions particulières de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$:

Pour chercher une solution particulière, on se contentera de chercher des solutions de même nature que le second membre $f(x)$.

Définition de la transformée de Laplace d'une fonction f :

Sous réserve d'existence, on a : $\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

Transformées de Laplace et dérivation :

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = p\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{f''\}(p) = p^2\mathcal{L}\{f\}(p) - pf(0) - f'(0).$$

Plus généralement, on a : $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

Transformées de Laplace de fonctions :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Laplace
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p + a}$
$t f(t) u(t)$	$-\frac{d}{dp}[\mathcal{L}\{f\}](p)$
$f(at) u(t)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{p}{a}\right)$
$e^{-at} f(t) u(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(p + a)$
$f(t - a) u(t - a)$	$e^{-ap}\mathcal{L}\{f\}(p)$
f fonction périodique de période T	$\mathcal{L}_0(p) \times \frac{1}{1 - e^{-pT}}$ où $\mathcal{L}_0$ est la transformée du motif
$f * g$ (produit de convolution)	$\mathcal{L}\{f\}(p) \times \mathcal{L}\{g\}(p)$

Convergence et divergence des suites :

Définition :

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ si :
 $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Suites arithmétiques :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

Suites géométriques :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| > 1$ alors (u_n) diverge.

Suites adjacentes : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- l'une est croissante, l'autre est décroissante.
- $\lim (u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Suites arithmético-géométriques :

Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que :

$\forall n \geq 0$, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n , on introduit une suite auxiliaire géométrique (v_n) (dans le cas où $a \neq 1$) telle que :

$v_n = u_n - \ell$ où ℓ la solution de l'équation $\ell = a\ell + b$.

ℓ correspond à la limite éventuelle de la suite.

Définition d'une série :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Le réel S_n défini par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelé somme partielle de rang n .
- La suite (S_n) des sommes partielles est appelée série de terme général u_n .
On la note : $\sum u_n$ voire $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Nature des séries numériques :

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) admet une limite finie. Cette limite est appelée somme de la série.

On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Condition nécessaire de convergence :

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Attention, la condition n'est pas suffisante.

Par exemple la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Nature de séries fondamentales :

- Séries géométriques : La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
Lorsque $|q| < 1$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- Séries de Riemann : La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Opérations avec les séries :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes et si a et b sont des réels alors la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente. On pourra donc écrire : $\sum (au_n + bv_n) = a \sum u_n + b \sum v_n$.

Séries à termes positifs :

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence :
Une série $\sum u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $\sum_{k=0}^n u_k \leq M$.
2. Comparaisons de séries à termes positifs :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0 .
 - Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
 - Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Séries et équivalents : Considérons deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.
Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Convergence absolue :

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

I Théorème de Dirichlet :

Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T -périodique alors la série de Fourier converge vers la régularisée de f . Ainsi :

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

II Coefficients réels et séries de Fourier

Définition :

- $a_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$

Propriété :

- Si f est paire alors, pour tout entier n non nul, $b_n = 0$ et $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt.$
- Si f est impaire alors, pour tout entier n non nul, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$

III Coefficients complexes et séries de Fourier

Propriété :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \bar{c}_n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = j(c_n - c_{-n})$

IV Égalité de Bessel-Parseval

$$\langle f^2 \rangle = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

V Taux de distorsion

Le taux de distorsion est défini par $D = \frac{\text{Valeur efficace des harmoniques}}{\text{Valeur efficace du fondamental}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)}{a_1^2}}.$

I Généralités

La transformée de Fourier d'une fonction f est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

II Propriétés

- Si f est paire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$ est réelle.
- Si f est impaire alors $\mathcal{F}(f)(\omega) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$ est imaginaire pure.
- La transformée de Fourier conserve la parité.
- La transformée de Fourier est linéaire. Pour tous réels a et b , pour toutes fonctions f et g admettant une transformée de Fourier, on a :

$$\mathcal{F}(af(t) + bg(t))(\omega) = a\mathcal{F}(f(t))(\omega) + b\mathcal{F}(g(t))(\omega)$$

- **Lien avec la transformée de Laplace (Cas d'un signal causal)**

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{L}(f)(j\omega)$$

- Transformées usuelles :

Expression temporelle	Expression de la transformée de Fourier
$f(t - \tau)$	$\mathcal{F}(f)(\omega) e^{-j\omega\tau}$
$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$\mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0)$
$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega)$
$\delta(t)$	1
$(f * g)(t)$	$\mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega)$

III Autour de l'impulsion et du produit de convolution

Propriété de l'impulsion : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - x) dt$ donc $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt$.

Produit de convolution des fonctions f et g : $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x) \cdot g(x) dx$.

Relation entre signal d'entrée u_e et signal de sortie u_s :

$$u_s = h * u_e \quad \text{ie} \quad u_s(t) = (h * u_e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - x) \cdot u_e(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot u_e(t - x) dx$$

On a donc

$$\mathcal{F}(u_s)(\omega) = \mathcal{F}(h)(\omega) \cdot \mathcal{F}(u_e)(\omega)$$

I Rayon de convergence

Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est tel que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Soit f une fonction C^∞ (continue et infiniment dérivable) sur $] -a; a[$.

II Développement en série entière

Soit f une fonction infiniment dérivable sur $] -R, R[$.

S'il existe $M > 0$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| < M$ pour tout $x \in] -R, R[$, alors f admet un développement en série entière, de rayon R .

On dit alors que f est développable par sa série de Mac Laurin et on a, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

III Application aux développements usuels

Expression de la fonction	DSE	Rayon de CV
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$

TRANSFORMÉES EN $\mathcal{Z}$

La transformation en $\mathcal{Z}$ est une application qui transforme une suite $f = \{f(nT_e)\}$ (définie sur $\mathbb{N}$) en une fonction $F : z \mapsto \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}$ d'une variable complexe telle que :

$$\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n} \text{ converge}\}.$$

Terme général de la suite $\{f(nT_e)\}$	Expression de la transformée en $\mathcal{Z}$
$\delta(nT_e)$	1
$u(nT_e)$	$\frac{z}{z-1}$
$nT_e \cdot u(nT_e)$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$a^{nT_e} \cdot u(nT_e)$	$\frac{z}{z-a^{T_e}}$
$\cos(\omega nT_e) \cdot u(nT_e)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$\sin(\omega nT_e) \cdot u(nT_e)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$

Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$:

- $\mathcal{Z}\{f([n-m]T_e)\}(z) = z^{-m} \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z).$
- $\mathcal{Z}\{f([n+1]T_e)\}(z) = z[\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) - f(0)]$ et
 $\mathcal{Z}\{f([n+2]T_e)\}(z) = z^2 \left[\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) - f(0) - \frac{1}{z}f(T_e) \right].$
- $\mathcal{Z}\{a^{nT_e} f(nT_e)\}(z) = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z).$
- $\mathcal{Z}\{nT_e f(nT_e)\}(z) = -zT_e F'(z)$ où $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z).$
- $\mathcal{Z}\{x \star y\} = \mathcal{Z}\{x\} \mathcal{Z}\{y\}.$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = f(0).$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z).$

