S 3	TD de Traitement du signal - Mathématiques discrètes	2016-2017

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

Prérequis :
• Décomposition en éléments simples (S1)
• Séries numériques (S2)

Exercice 1 : $\star$
Soit z un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.

1. Exprimer, en fonction de z, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$.
2. À quelle condition la série $\sum z^n$ est-elle convergente ? Que valent alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} z^k$.

Exercice 2 : $\star\star$
Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes définies par leur terme général :

$$u_n = \frac{z^n}{n^2+1} \quad ; \quad v_n = \frac{z^n}{\sqrt{n}} \quad ; \quad w_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \quad ; \quad x_n = \frac{z^n}{n^n}$$
$$y_n = z^n \ln n \quad ; \quad t_n = z^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad s_n = \frac{n^n}{n!} z^{3n}.$$

Exercice 3 : $\star\star$
On considère la fonction S définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n!}$ et en déduire le domaine de définition de S.
2. Vérifier que S est solution de l'équation différentielle $y' = y$. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

3. En considérant des DSE sur $\mathbb{C}$, montrer que, pour tout réel θ, on a $\mathrm{e}^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$.

Exercice 4 : $\star\star$
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries définies par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1}$$

Exercice 5 : $\star\star$
Développer en série entière les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad ; \quad g(x) = \sin^2(x) \quad ; \quad h(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$$

Exercice 6 : $\star\star$
Résoudre les équations différentielles suivantes, à coefficients non constants, en cherchant des solutions sous forme de séries entières :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} y" + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \qquad (E') \left\{ \begin{array}{l} xy" + 2y' + xy = 0 \\ y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Exercice 7 : $\star\star\star$

1. (a) Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   (b) En déduire le développement en série entière de la fonction arctan sur $]-1;1[$.
2. (a) Montrer que : $\frac{(5+j)^4}{239+j} = 2(1+j)$. En utilisant les propriétés sur l'argument d'un nombre complexe, démontrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

   (b) En déduire une valeur approchée à 10^{-5} près de π.

Exercice 8 : $\star\star\star$
En 1995, Plouffe , Bailey et Borwein ont découvert une nouvelle formule conduisant à π en utilisant des séries entières. L'objectif est de démontrer que :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p}$ avec $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série entière définie ci-dessus a un rayon de convergence supérieur à 1.
2. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{16x^{p-1}}{16 - x^8}$.
3. En posant $x = 1$ et $p = 1; 4; 5; 6$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) = 16 \int_0^1 \frac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{16 - t^8} \mathrm{d}t$$

4. Pour cette question, certains calculs étant fastidieux, l'utilisation de Maple est conseillée.
   (a) Montrer que : $4 - 2t^3 - t^4 - t^5 = -(t-1)(t^2 + 2t + 2)(t^2 + 2)$ et $16 - t^8 = (2 - t^2)(2 + t^2)(t^2 + 2t + 2)(t^2 - 2t + 2)$ puis simplifier $\dfrac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{16 - t^8}$.
   (b) Montrer que : $\dfrac{1 - t}{(2 - t^2)(t^2 - 2t + 2)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{t}{t^2 - 2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{2 - t}{t^2 - 2t + 2}$.
   (c) Calculer $4 \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2 - 2} + \frac{2 - t}{t^2 - 2t + 2} \mathrm{d}t$ et conclure.

AUTOUR DE LA TRANSFORMÉE EN $\mathcal{Z}$

Exercice 9 : $\star\star$

Soit N un entier naturel non nul. On considère la fonction définie par

$$f(t) = u(t) - u(t - N)$$

1. Représenter la séquence numérique $(f(nT_e))$.
2. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de cette séquence numérique en utilisant :
   (a) les formules usuelles de la transformée en $\mathcal{Z}$;
   (b) un calcul de somme basé sur la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$.

Exercice 10 : $\star\star$
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ des séquences numériques définies par :

$f_1(nT_e) = (nT_e - 1)\, u(nT_e)$ $\quad$ $f_2(n) = n\, u(n-1)$ $\quad$ $f_3(n) = 3^n\, u(n)$
$f_4(n) = 2^{-n}\, u(n+1)$ $\quad$ $f_5(n) = \mathrm{e}^{-n}\,[u(n) - u(n-2)]$ $\quad$ $f_6(n) = n^2\, u(n)$
$f_7(n) = \mathrm{e}^{-n} \sin(\omega n)\; u(n)$ $\quad$ $f_8(nT_e) = nT_e 2^{nT_e}\, u(nT_e)$

Exercice 11 : $\star\star$
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique et f_0 son motif. On a donc :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0; T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Exprimer f en fonction de f_0.
2. En déduire la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal de f échantillonné selon la période $T_e = \frac{T}{3}$ à l'aide de la transformée en $\mathcal{Z}$ de f_0.
3. Application :
   Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de la séquence définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si} \quad n \in \{0, 1, 2\} \\ f(n+3) = f(n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Exercice 12 : $\star\star$

1. Trouver l'original de F telle que : $F(z) = \dfrac{z}{z - \rho \mathrm{e}^{j\theta}} + \dfrac{z}{z - \rho \mathrm{e}^{-j\theta}}$.
2. Trouver l'original de G telle que : $G(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ ($|\mathrm{z}| > 1$).
3. Trouver l'original de H telle que : $H(z) = \dfrac{1}{z^2 - 9z + 20}$.

Exercice 13 : $\star\star$
Résoudre l'équation aux différences du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y(n+1) - 3y(n) = u(n) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 : $\star\star$
Résoudre l'équation aux différences du $2^{\text{ème}}$ ordre suivante :

$$\begin{cases} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \delta(n) \\ y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 15 : $\star\star\star$
Calculer, en utilisant deux méthodes différentes, la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$