Semestre 5

Exercices sur les variables aléatoires discrètes

Compétences et capacités attendues
- Reconnaître un schéma de Bernoulli, lois binomiales.
- Calculer des probabilités du type $\mathbb{P}(X=k)$, $\mathbb{P}(X \leq k)$, $\mathbb{P}(X \geq k)$ et $\mathbb{P}(k \leq X \leq k')$ en utilisant la fonction de répartition.
- Déterminer des espérances et variances par calcul.
- Exprimer des espérances et variances telles que

$$\mathbb{E}\left(2X-3Y\right), \quad \mathbb{V}\left(2X-3Y\right), \mathbb{E}(X^2), \sigma\left(X+Y-Z\right), \mathbb{E}\left(\sum_i X_i\right), \mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right)$$

Pour les calculs de probabilité avec la loi binomiale, consulter la partie Probabilités des documents Begin'R :
http://beginr.u-bordeaux.fr

Exercice 1 :
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On a donc

$$\forall k \in \{1;\cdots;n\} \quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$$

Pour avoir des compléments d'information sur la loi uniforme (discrète), vous pouvez consulter
https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_uniforme_discrète

1. Montrer que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(2X+1)$ ainsi que $\mathbb{V}(2X+1)$ en utilisant que $\mathbb{V}(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathbb{E}(X-Y)$ ainsi que $\mathbb{V}(X+Y)$ et $\mathbb{V}(X-Y)$.
4. Déterminer $\mathbb{C}ov(X;X)$ et $\mathbb{C}ov(X;Y)$.
5. Déterminer $\mathbb{C}ov(X+Y;X-Y)$.

[Correction de l'exercice 1]

Exercice 2 :
À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition.
On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi chacune de ces barrières.

1. (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) On suppose, dans cette question, que $n = 20$. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$, $\mathbb{P}(X_1 \leq 2)$, $\mathbb{P}(X_1 \geq 10)$ et $\mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 12)$.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
   X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

[Correction de l'exercice 2]

Correction des exercices

Exercice 1 :

1. $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k.$
   En utilisant que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, il vient
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$
2. Rappelons que $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$. Ainsi
   $$\mathbb{E}(2X+1) = 2\mathbb{E}(X)+1 = n+2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X+1) = 4\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{3}$$
3. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = n+1\,;\, \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y) = 0.$
   X et Y étant indépendantes, on a $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = \frac{n^2-1}{6}$ et
   $\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X)+(-1)^2\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = \frac{n^2-1}{6}.$
4. On rappelle que $\mathbb{C}ov(X;Y) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]\right)$. Ainsi
   $\mathbb{C}ov(X;X) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][X-\mathbb{E}(X)]\right) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{V}(X).$
   Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a $\mathbb{C}ov(X;Y) = 0$.
5. $\mathbb{C}ov(X+Y;X-Y) = \mathbb{E}\left([X+Y-\mathbb{E}(X+Y)][X-Y-\mathbb{E}(X-Y)]\right)$ soit
   $\mathbb{C}ov(X+Y;X-Y) = \mathbb{E}\left([X+Y-(n+1)][X-Y]\right) = \mathbb{E}\left([X+Y][X-Y]\right)-(n+1)\mathbb{E}\left(X-Y\right).$
   Ainsi $\mathbb{C}ov(X+Y;X-Y) = \mathbb{E}\left(X^2-Y^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 0.$
   On aurait pu utiliser que
   $\mathbb{C}ov(X+Y;X-Y) = \mathbb{C}ov(X;X)-\mathbb{C}ov(X;Y)+\mathbb{C}ov(Y;X)-\mathbb{C}ov(Y;Y) = \mathbb{V}(X)-V(Y) = 0.$

[Retour aux énoncés]

Exercice 2 :

1. (a) Chaque voiture a la probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ de choisir le premier péage. On a donc

$$X_1 \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{3}\right)$$

(b) On suppose, dans cette question, que $n = 20$. Déterminer
$P_1 = \mathbb{P}(X_1 = 2)$, $P_2 = \mathbb{P}(X_1 \leq 2)$, $P_3 = \mathbb{P}(X_1 \geq 10)$ et $P_4 = \mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 12)$.

```
> p = 1/3
> n=20
> P1 = dbinom(x = 2 , size = n , prob = p )
> P1
```

```
[1] 0.01428461
```

```
> P2 = dbinom(x = 0 , size = n , prob = p ) +
+   dbinom(x = 1 , size = n , prob = p ) +
+   dbinom(x = 2 , size = n , prob = p )
> # Il est préférable d'utiliser
> P2 = pbinom(q = 2 , size = n , prob = p )
> P2
```

```
[1] 0.01759263
```

```
> # P3 = P(X1 >= 10) = 1 - P(X <=9)
> P3 = 1 - pbinom(q = 9 , size = n , prob = p)
> P3
```

```
[1] 0.09189577
```

```
> # P4 = P(2 <= X1 <= 12) = P(X1 <=12) - P(X1 <= 1)
> P4=pbinom(q = 12, size = n, prob = p) - pbinom(q = 1, size = n , prob = p)
> P4
```

```
[1] 0.9929674
```

2. $X_2 \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{3}\right)$ donc $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = np(1-p) = \dfrac{2n}{9}$.
En outre, $X_1 + X_2$ est la variable aléatoire égale au nombre de voitures qui empruntent la première ou la deuxième barrière. Ainsi

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{2}{3}\right)$$

On a donc

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}$$

On peut également utiliser que $X_1 + X_2 + X_3 = n$ i.e. $X_1 + X_2 = n - X_3$ où $X_3 \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{3}\right)$.
Ainsi

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(n - X_3) = \mathbb{V}(X_3) = \frac{2n}{9}$$

3. $\mathbb{V}(X_1+X_2)=\mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)+2\mathbb{C}ov(X_1;X_2)$ donc $\dfrac{2n}{9}=2\times\dfrac{2n}{9}+2\mathbb{C}ov(X_1;X_2)$ soit

$$\mathbb{C}ov(X_1;X_2)=-\frac{n}{9}$$

La covariance des variables X_1 et X_2 n'est pas nulle ce qui permet de conclure que ces variables ne sont donc pas indépendantes.

[Retour aux énoncés]