

Prérequis :

- Décomposition en éléments simples (S2)
- Suites (S2)
- Séries numériques (S2)

Exercice 1 : *

Soit z un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.

1. Exprimer, en fonction de z , $\sum_{k=0}^n z^k$.

2. À quelle condition la série $\sum z^n$ est-elle convergente ? Que valent alors $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} z^k$?

Exercice 2 : **

1. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k ; \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

2. On considère un nombre complexe z tel que $|z| > 1$. Déterminer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

Exercice 3 : **

Représenter la séquence $(u(nT_e))_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que sa transformée en $\mathcal{Z}$ dans les cas suivants :

$$f_1(nT_e) = u(nT_e) \quad f_2(nT_e) = nT_e u(nT_e - T_e) \quad f_3(nT_e) = nT_e u(nT_e - 2T_e)$$

Exercice 4 : **

On considère la fonction définie par

$$f(t) = u(t) - u(t - 3T_e)$$

1. Représenter la séquence numérique $(f(nT_e))$ avec $T_e = 1$.

2. Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de cette séquence numérique en utilisant :
 - (a) les formules usuelles de la transformée en $\mathcal{Z}$;
 - (b) un calcul de somme basé sur la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$.

Exercice 5 : **

Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ des séquences numériques définies par :

$$\begin{aligned} f_1(nT_e) &= 3^{nT_e} u(nT_e) & f_2(n) &= 2^{-n} u(n+1) \text{ avec } T_e = 1 \\ f_4(nT_e) &= (nT_e)^2 u(nT_e) & f_3(n) &= e^{-n} [u(n) - u(n-2)] \text{ avec } T_e = 1 \\ f_5(nT_e) &= e^{-nT_e} \sin(\omega nT_e) u(nT_e) & f_6(nT_e) &= nT_e 2^{nT_e} u(nT_e) \end{aligned}$$

Exercice 6 : **

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, T -périodique et f_0 son motif. On a donc :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0; T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Exprimer f en fonction de f_0 .
2. En déduire la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal de f échantillonné selon la période $T_e = \frac{T}{3}$ à l'aide de la transformée en $\mathcal{Z}$ de f_0 .
3. Application :
Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ de la séquence définie par

$$\begin{cases} f(n) = n & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ f(n+3) = f(n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exercice 7 : **

1. Trouver l'original de F telle que : $F(z) = \frac{z}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{z}{z - \rho e^{-j\theta}}$.
2. Trouver l'original de G telle que : $G(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ($|z| > 1$).
3. Trouver l'original de H telle que : $H(z) = \frac{1}{z^2 - 9z + 20}$.

Exercice 8 : **

Résoudre l'équation aux différences du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y(n+1) - 3y(n) = u(n) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 : **

Résoudre l'équation aux différences du 2^{ème} ordre suivante :

$$\begin{cases} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \delta(n) \\ y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 10 : ***

Calculer, en utilisant deux méthodes différentes, la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 11 : **

Génération de l'écho

Au S4, une application sera développée sur le microcontrôleur STM32 pour générer numériquement un écho sur un signal audio transmis depuis un téléphone portable. La fréquence d'échantillonnage est imposée à $F_e = 44100$ Hz, conformément à la norme HiFi. L'écho est caractérisé principalement par 2 paramètres : le retard N (en nombre d'échantillons) et le gain de retour a . Il est généré à partir du schéma de la Fig.1 où K permet d'agir sur le volume de sortie.

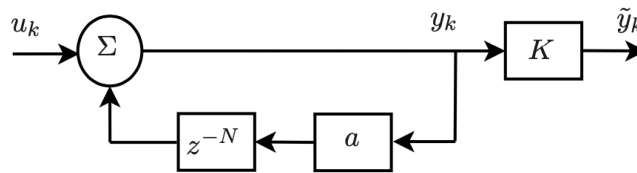


FIGURE 1 – Réalisation d'un écho.

1. Déterminer la fonction de transfert du filtre entre la sortie et l'entrée.
2. Donner les valeurs admissibles du gain a assurant la stabilité du filtre implanté, stabilité qui permet d'éviter l'effet Larsen.
3. A partir de cette fonction de transfert, déterminer l'équation de récurrence liant la sortie y_k à l'entrée u_k et aux entrées/sorties précédentes.