Année universitaire 2024-2025

Développements limités

AOP - Complément exigeant MP

Semestre 3

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

I Théorème de Rolle

Théorème 1 : (Théorème de Rolle)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

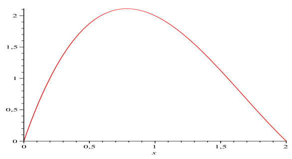

FIGURE 1 – Illustration du théorème de Rolle

II Formule des accroissements finis

Théorème 2 : (TAF)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

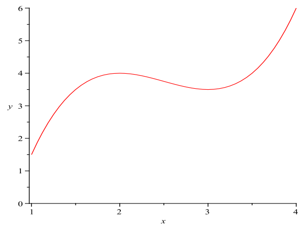

FIGURE 2 – Illustration du TAF

Démonstration : Posons $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.

D'après l'énoncé du TAF, il existe $c \in]a;b[$ tel que : $f(b) = f(a) + f'(c)\,(b - a)$.

III Formules de Taylor

III.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 3 : (Formule de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n sur $[a;b]$ et dérivable à l'ordre $(n+1)$ sur $]a;b[$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration :
La formule de Taylor-Lagrange est une conséquence directe du théorème de Rolle.
Introduisons la fonction g définie par : $g(x) = f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - K(b-x)^{n+1}$ où K est choisi de sorte que $g(a) = 0$. Ainsi : $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = K(b-a)^{n+1}$.
Puisque $g(a) = g(b) = 0$, le théorème de Rolle permet de justifier l'existence d'un réel $c \in]a;b[$ tel que : $g'(c) = 0$.
Or
$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + K(n+1)(b-x)^n$ donc $-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + K(n+1)(b-c)^n = 0$.
Comme $a < c < b$, on a : $b - c \neq 0$ donc $-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} + K(n+1) = 0$.
On a donc : $K(n+1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}$ soit $K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Il en résulte que : $f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$. □

Remarque 1 :
En considérant les mêmes hypothèses, avec $a = 0$ et $b = x$, il existe c compris entre 0 et x tel que :

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}$$
.

Exercice 1 *Déterminer une approximation de la fonction* sin *au voisinage de* 0 *par un polynôme de degré* 3 *en utilisant la formule de Taylor-Lagrange.*

On en déduit une majoration de l'erreur qui est la suivante : $\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \left|\frac{x^4}{4!}\right|$.

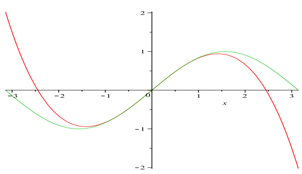

FIGURE 3 – Courbes représentatives de sin et $x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$

III.2 Formule de Taylor-Young

On rappelle que, sous certaines hypothèses, on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

où c est entre a et x.

Considérons le reste $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$. En divisant par $(x-a)^n$, on obtient : $\frac{x-a}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.
Si $f^{n+1}(c)$ est fini alors ce quotient tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Plus généralement, on a le théorème ci-dessous.

Théorème 4 : (Formule de Taylor-Young)
Si la fonction f est dérivable en a jusqu'à l'ordre n alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 2 : En considérant $a = 0$, on obtient :
Si f est une fonction dérivable n fois en 0 alors f peut s'écrire :
$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

IV Développements limités

IV.1 Généralités

Définition 1 : Soit f est une fonction définie au voisinage de a.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe un polynôme P de degré n (appelée partie régulière du DL) tel que :

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 3 : Si f est une fonction définie au voisinage de 0, f admet un DL d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P de degré n tel que :

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 4 : (DL et Formule de Taylor-Lagrange)
La formule de Taylor-Young assure qu'une fonction f, dérivable n fois au point a, admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.
On a :
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

DL d'ordre 1 et tangente 5 :
Si f est dérivable en a alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.
La partie régulière $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est à rapprocher de l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

IV.2 Développements limités en 0

Propriété 1 : (Existence d'un DL d'ordre n au voisinage de 0)
Une fonction f, dérivable n fois en 0, admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Propriété 2 :

- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ $(n \geq 1)$ alors f est dérivable en 0.
- Si $f(x) = a_k x^k + x^k\varepsilon(x)$ alors $f(x) \sim a_k x^k$ (avec $a_k \neq 0$).
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui-ci est unique (P et ε uniques).
- P a la même parité que f.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors elle admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ pour tout $p \leq n$.

Déterminons des DL(0) des fonctions : $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$; $g : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $h : x \mapsto \sin x$.
Ces fonctions étant infiniment dérivables, on peut utiliser la formule de Taylor-Young :
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Théorème 5 : (DL en 0)

$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$.

$\mathrm{e}^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$.

$\sin(x) = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$.

Exercice 2 *Déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$.*

Propriété 3 : (Opérations sur les DL)

Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g.

- La somme $f+g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P_f+P_g.
- Le produit fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. La partie régulière s'obtient en effectuant $P_f \times P_g$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 3 *Déterminer le $DL_1(0)$ de $x \mapsto e^x \times \sqrt{1+x}$.*

Propriété 4 : (Dérivation et intégration)
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et vérifie les hypothèses du théorème de Taylor-Young, f' admet un d'ordre $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ et $P_{f'} = (P_f)'$.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ et P_F s'obtient en intégrant P_f avec $P_F(0) = F(0)$.

Exercice 4 *Déterminer le* $DL_n(0)$ *de* $x \mapsto \ln(1+x)$ *et le* $DL_{2n}(0)$ *de* $\cos$.

Théorème 6 : (DL en 0)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Propriété 5 : (DL de fonctions composées)
Si $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie principale $P_f \circ P_g$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 5 *DL et composées*

1. *Déterminer le* $DL_2(0)$ *de* $x \mapsto e^{\sin x}$.
2. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto -\ln(\cos x)$ *et en déduire le* $DL_3(0)$ *de* $\tan$.

Remarque 6 : Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ alors elle est dérivable (il y a équivalence).
Cette implication n'est pas vraie dans le cas d'un ordre $n > 1$.
En effet, la fonction f définie par : $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ car $f(x) = x^2\varepsilon(x)$.
f est dérivable et on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$ (cf. limite du taux d'accroissement).
f' n'est pas continue en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0 ce qui permet de conclure que $f"(0)$ n'est pas défini.
Voici donc un exemple de fonction dont la dérivée seconde n'est pas définie en 0 mais qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.

Exercice 6 *DL d'un inverse*

Méthode :
Supposons que $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ *avec* $a_0 \neq 0$ *au voisinage de* 0.
En écrivant $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a_1}{a_0}x+...+\frac{a_n}{a_0}x^n+x^n\varepsilon(x)\right)} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1+u}$ *on peut former un développement limité à l'ordre* n *de* f *en* 0 *...*

Application : Déterminer le $DL_2(0)$ *de* $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ *et en déduire le* $DL_3(0)$ *de* $x \mapsto \tan x$

IV.3 Développement en un réel x_0 non nul

Méthode :
Pour déterminer un développement limité en x_0 d'une fonction f, on relocalise le problème en 0 via le changement de variable $x = x_0 + h$.
On détermine alors un développement limité en 0 de la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ puis on transpose ce DL en développement limité en x_0 en remplaçant h par $x - x_0$.

Exercice 7 *Déterminer le DL d'ordre* 2 *de* ln *en* 1.

IV.4 Notion de développement asymptotique

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
On appelle développement asymptotique d'une fonction f en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^n}$, toute écriture
$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Propriété 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$.
f admet un développement asymptotique en $+\infty$ si $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL en 0.
Dans ce cas $P_f(x) = P_g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 8 *Déterminer le développement asymptotique de* f *en* $+\infty$ *à la précision* $\frac{1}{x}$ *pour la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

IV.5 Applications des développements limités

IV.5.1 Calcul de limites

Exercice 9 *Déterminer, si elle existe,* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{\tan(x)}$.

IV.5.2 Etude de branche infinie

Exercice 10 *Déterminer la position relative de la courbe représentative de* $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4x}$ *par rapport à son asymptote au voisinage de* $+\infty$.

V Exercices

Exercice 1 : ⋆⋆

1. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto x \cos x$.
2. Déterminer le DL d'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction $\cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
3. Déterminer le DL d'ordre 5, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin x$.
4. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ainsi que celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 2 : ⋆⋆

1. Déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de 0, de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   En déduire le DL d'ordre 5 de arctan.
2. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $h : x \mapsto e^x \ln(1+x)$.
3. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.
4. Déterminer le DL d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$.
5. Déterminer le DL d'ordre 2, au voisinage de 3, de la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$.
6. Déterminer le DL d'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction $g : x \mapsto e^{\cos x}$.

Exercice 3 : ⋆⋆

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} - \frac{1}{2x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\tan x - x}$
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Exercice 4 : [Asymptotes à une courbe au voisinage de $+\infty$] ⋆⋆
En utilisant un développement asymptotique, déterminer une équation de l'asymptote à la courbe représentative des fonctions définies ci-dessous ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 6x}$
2. $g(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

Exercice 5 : ⋆⋆⋆
Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement, noté $\widehat{f}$, est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe de $\widehat{f}$ par rapport à sa tangente au point de coordonnées $(0; 1)$?

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Former le développement asymptotique quand x tend vers $+\infty$ de $\arctan x$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

Exercice 7 : ⋆⋆⋆
Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(e^x)$$