

Cours d'Algèbre Linéaire

Groupe B1

Semestre 4

Université de Bordeaux

Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr

Site internet : <http://flarnal.e-monsite.com>

2018

Table des matières

I	Matrices	1
I.1	Généralités	1
I.2	Opérations sur les matrices	1
I.3	Multiplication d'une matrice par un réel	2
I.4	Multiplication de matrices entre elles	2
I.5	Matrice transposée	3
I.6	Matrices carrés inversibles	3
II	Déterminant d'une matrice	5
II.1	Généralités	5
II.2	Cas des matrices d'ordres 2 et 3	5
II.3	Propriétés des déterminants (admisses)	7
II.4	Application des déterminants : Inversion de matrices	8
III	Espaces vectoriels	9
III.1	Vocabulaire et propriétés élémentaires	9
III.2	Espaces vectoriels de référence	9
III.3	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel	10
III.4	Combinaisons linéaires. Sous-espace engendré	12
III.5	Somme de sous-espaces vectoriels	13
III.6	Sommes directes et sous-espaces supplémentaires	13
IV	La dimension finie	15
IV.1	Familles génératrices - Dimension	15
IV.2	Familles libres, familles liées	15
IV.3	Bases	18
V	Applications linéaires	20
V.1	Injection, Surjection, Bijection d'une application	20
V.2	Généralités sur les applications linéaires	20
V.3	Noyau d'une application linéaire	23
V.4	Espace Image d'une application linéaire	24
V.5	Rang et représentation matricielle	25
V.6	Changement de bases	27
VI	Diagonalisation	28
VI.1	Introduction	28
VI.2	Valeurs et vecteurs propres	28
VI.3	Diagonalisabilité	30
VI.4	Application 1 : Puissance n -ième d'une matrice	32
VI.5	Application 2 : Résolution de systèmes homogènes d'équations différentielles du premier ordre	33

I Matrices

I.1 Généralités

DÉFINITION 1 : Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice toute application M de $\llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} M : \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket &\rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) &\mapsto M(i, j) = m_{i,j} \end{aligned}$$

$(m_{i,j})$ est appelé coefficient de la matrice M d'indices i et j , le premier indice est appelé indice de ligne, et le second indice de colonne.

On dit que M est de taille $m \times n$ ou de type (m, n) . L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1 Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. On a : $m_{11} = 3$ et $m_{22} = 2$.

Exemple 2 $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne. $N \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

REMARQUE 1 :

- Deux matrices sont égales si elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.
- Lorsque $m = n$, on dit que la matrice est carrée (d'ordre n). L'ensemble des matrices carrées à n lignes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Lorsque $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne.
- Lorsque $m = 1$, on dit que M est une matrice colonne.

DÉFINITION 2 : (Matrices carrées particulières)

M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- triangulaire supérieure si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, i > j \Rightarrow m_{ij} = 0$.
- triangulaire inférieure si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, i < j \Rightarrow m_{ij} = 0$.
- diagonale si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0$.

REMARQUE 2 : Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les éléments au dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple 3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

DÉFINITION 3 :

- La matrice de taille (m, n) dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle de taille $n \times m$ et notée $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$ voire 0 .
- La matrice carrée diagonale de taille n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1 appelée matrice unité (ou identité) de taille n et notée I_n .

Ainsi : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.2 Opérations sur les matrices

DÉFINITION 4 : La somme de deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en ajoutant les éléments correspondants de A et B . Ainsi, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple 4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

I.3 Multiplication d'une matrice par un réel

DÉFINITION 5 : Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et λ un réel.

Le produit de la matrice A par le réel λ , noté λA est la matrice $A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, a'_{ij} = \lambda a_{ij}$$

I.4 Multiplication de matrices entre elles

DÉFINITION 6 : Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et B une matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Le produit matriciel de A par B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket, c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ -1 \times 3 + 3 \times 2 & -1 \times 1 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 3 :

Le nombre de colonnes de la "première" matrice doit être égal au nombre de lignes de la "seconde" matrice. Sans cela, la multiplication n'est pas définie.

Le produit de deux matrices $A_{(m,n)} B_{(n,p)}$ est une matrice $C_{(m,p)}$, c'est-à-dire avec le même nombre de lignes que la "première" et le même nombre de "colonnes" que la "seconde".

Exercice 1 Calculer AB puis A^2 sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a : } AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 4 \\ 32 & 52 & 8 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 4 :

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

On constate donc que le produit de matrices n'est pas commutatif! En général :

$$A.B \neq B.A$$

2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut calculer AB mais le produit BA n'est pas défini.

PROPRIÉTÉ 1 : Produit de matrices triangulaires et diagonales

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De même le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure et le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

De plus, si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ alors le produit AB est égal à la matrice diagonale définie par $AB = \text{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$. En particulier, les matrices diagonales commutent entre elles.

I.5 Matrice transposée

DÉFINITION 7 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A et on note ${}^tA = (a'_{ij})$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, a'_{ij} = a_{ji}$$

REMARQUE 5 : tA est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes (et vice versa).

Exemple 6 • Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a : ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

• La transposée de la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 2 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et k un réel.

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$; ${}^t({}^tA) = A$; ${}^t(kA) = k{}^tA$.
- ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$.

I.6 Matrices carrés inversibles

Théorème-Définition 1 : Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A.B = B.A = I_n$$

Si A est inversible, la matrice B est unique et appelée la matrice inverse de A , notée A^{-1} .

D'après la définition, trouver une matrice A' telle que $AA' = I_n$, ne suffit pas, il faut aussi vérifier que $A'A = I_n$.

Théorème 1 : Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

- (i) A est inversible ;
 - (ii) A est inversible à droite i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = I_n$;
 - (iii) A est inversible à gauche i.e. $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), CA = I_n$.
- Si de plus tel est le cas, $A^{-1} = B = C$.

Exemple 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver A^{-1} si elle existe.

On cherche, sous réserve d'existence, une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$AB = I_2 \text{ soit } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ conduisant au système } \begin{cases} a+c=1 \\ c=0 \\ b+d=0 \\ d=1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=-1 \\ d=1 \end{cases}.$$

Ainsi, la matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 3 : De façon plus générale, une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$ admet une matrice inverse telle que : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

PROPRIÉTÉ 4 : Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;
- tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$;
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

PROPRIÉTÉ 5 : Une matrice diagonale A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible alors $A^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Exemple 8 Inversion d'une matrice carré d'ordre 3 :

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. On admet que cette matrice est inversible.

D'après ce qui précède, on a : $AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.

En considérant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour obtenir la matrice inverse de A , il suffit de résoudre un système en explicitant x, y et z en fonction de a, b et c . Dans notre exemple, on a :

$$\begin{cases} -x + 2y + 5z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ -2x + 8y + 10z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 5z = a \\ 4y + 8z = a + b \\ 4y = -2a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 5z = a \\ 4y + 8z = a + b \\ 8z = 3a + b - c \end{cases}$$

On a donc : $\begin{cases} x = -\frac{1}{8}a + \frac{5}{8}b - \frac{1}{8}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c \\ z = \frac{3}{8}a + \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}c \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 5/8 & -1/8 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 5/8 & -1/8 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer un critère d'inversibilité d'une matrice en introduisant la notion de déterminant.

II Déterminant d'une matrice

II.1 Généralités

DÉFINITION 8 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n . On appelle mineur relatif au terme a_{ij} , noté Δ_{ij} , le déterminant de la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Exemple 9 Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le mineur relatif à a_{11} est égal à

Théorème-Définition 2 : (Développement d'un déterminant)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A noté $\det A$ voire $|A|$ est le nombre réel, défini par récurrence sur n par :

1. si $n = 1$ et $A = (a)$ alors $\det A = a$;
2. si $n \geq 2$ alors

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}$$

PROPRIÉTÉ 6 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quels que soient les indices i et j appartenant à $\llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}$$

DÉFINITION 9 : Le terme $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ est appelé cofacteur de a_{ij} .

REMARQUE 6 :

1. Les signatures $(-1)^{i+j}$ forment un échiquier : $\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \dots & & & \dots \end{pmatrix}$.
2. Pour le calcul d'un déterminant, on peut développer par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.
3. Un déterminant est associé à la notion d'application multilinéaire n -alternée.

II.2 Cas des matrices d'ordres 2 et 3

- Cas où $n = 2$:

Considérons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} = a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

- Cas où $n = 3$:

Considérons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}$ soit

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple 10 Calculer les déterminants des matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 7 : **Méthode de Sarrus, uniquement pour déterminant d'ordre 3**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. En utilisant la formule précédente, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

La méthode de Sarrus consiste à effectuer $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

et le résultat est $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$.

Exemple 11 Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

II.3 Propriétés des déterminants (admises) :

PROPRIÉTÉ 7 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) alors le déterminant de A est égal au produit des coefficients diagonaux de A .

En particulier, si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

- $\det(A) = \det({}^t A)$.
- Si la matrice A possède une ligne ou une colonne de 0 alors $\det(A) = 0$.

PROPRIÉTÉ 8 : Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un réel.

- La matrice B obtenue à partir de A par multiplication d'une ligne (ou d'une colonne) de A par k vérifie $\det(B) = k \det(A)$.
- La matrice B obtenue à partir de A en échangeant 2 lignes (ou 2 colonnes) de A vérifie $\det(B) = -\det(A)$.
- La matrice B obtenue à partir de A en additionnant un multiple d'une ligne (ou colonne) de A à une autre vérifie $\det(B) = \det(A)$.

Conséquences fondamentales :

- On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (idem pour colonnes).
- Si la matrice A a 2 lignes (ou 2 colonnes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Si une ligne (respectivement colonne) est combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes) alors $\det(A) = 0$.
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Exercice 2 Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉ 9 : Critère d'inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

PROPRIÉTÉ 10 : Application au nombre de solutions d'un système

Un système linéaire admet une unique solution si et seulement si le déterminant de la matrice associée est non nul.

II.4 Application des déterminants : Inversion de matrices

PROPRIÉTÉ 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La comatrice de A , notée $\text{com}(A)$, est la matrice constituée des cofacteurs de A . On a :

$$A \times {}^t\text{com}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

On rappelle que le terme $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ est le cofacteur de a_{ij} .

PROPRIÉTÉ 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^t\text{com}(A)$$

Exercice 3 On considère la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice M est inversible, déterminer M^{-1} et en déduire la résolution du système $(S) \begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$.

III Espaces vectoriels

III.1 Vocabulaire et propriétés élémentaires

Dans tout ce cours, on considère $\mathbb{R}$ comme corps de base.

Ainsi, tous les coefficients (scalaires) sont des nombres réels.

Dans ce qui suit, on considère un ensemble noté E .

Comme il est d'usage en géométrie, un élément de E est appelé vecteur.

Ainsi, un élément u de E peut être également noté $\vec{u}$.

DÉFINITION 10 : Espace vectoriel

E , ensemble non vide, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$ -e.v.) lorsque E possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée ".") avec les propriétés suivantes :

1. Propriétés donnant une structure de groupe abélien $(E, +)$
 - Commutativité : $\forall (u, v) \in E^2, \quad u + v = v + u$
 - Associativité : $\forall (u, v, w) \in E^3, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
 - Existence d'un élément neutre $u_0 \in E$ (appelé vecteur nul) tel que : $u + u_0 = u_0 + u = u$
Le vecteur nul est unique et se note généralement 0_E voire $\vec{0}_E$.
 - Existence, pour tout vecteur u de E , d'un symétrique u' tel que : $u + u' = 0_E$.
On a alors : $u' = -u$ et $u + (-v) = u - v$.
2. Loi . vérifiant : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (u, v) \in E^2$
 - $(\lambda + \mu) . u = \lambda . u + \mu . u$
 - $\lambda . (u + v) = \lambda . u + \lambda . v$
 - $\lambda . (\mu . u) = (\lambda \mu) . u$
 - $1 . u = u$

A noter que :

- le point de la notation $\lambda . u$ est en général omis dans l'écriture : $\lambda . u = \lambda u$.
- On écrit toujours les scalaires à gauche des vecteurs dans la multiplication externe.

Conséquences :

- $\forall u \in E, \quad 0 . u = \vec{0}_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda . \vec{0} = \vec{0}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E, \quad (-\lambda) . u = -\lambda . u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E, \quad \lambda . u = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad u = \vec{0}$

III.2 Espaces vectoriels de référence

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Posons $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.
Soient $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux éléments de E , $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Considérons la somme des vecteurs u et v , notée $u + v$, défini par : $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.
 - La multiplication (externe) de u par λ , notée $\lambda . u$ étant définie par : $\lambda . u = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.Ces deux opérations confèrent à E une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
Ainsi, en considérant $E_i = \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- L'ensemble noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- L'addition des polynômes et leur multiplication par un scalaire confèrent à l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

III.3 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

DÉFINITION 11 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

- F est inclus dans E .
- F est non vide.
- F est stable par addition i.e. $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$.
- F est stable pour la multiplication par un scalaire i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in F, \quad \lambda u \in F$.

Exemple 12

- $\left\{ \vec{0}_E \right\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .
- L 'espace des suites réelles bornées est un s.e.v. de l'espace des suites réelles.
- $\mathbb{R}^+$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) définies sur $\mathbb{R}$ est-il un s.e.v. de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Théorème 2 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- F est inclus dans E .
- F est non vide.
- F est stable par combinaison linéaire i.e. $\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda u + \mu v \in F$

Exercice 5 Les ensembles $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Théorème 3 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors leur intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration :

REMARQUE 8 :

1. En général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
2. $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car on n'a pas $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Théorème 4 : Soit n un entier naturel non nul.

Les polynômes de degré inférieur ou égal à n constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, noté $\mathbb{R}_n[X]$.

III.4 Combinaisons linéaires. Sous-espace engendré

DÉFINITION 12 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E .

On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, tout vecteur x pour lequel il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est noté $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Exemple 13

Si $x \in E \setminus \{0_E\}$ alors $\text{Vect}\{x\} = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v. de E (appelé droite vectorielle engendrée par x).

Exercice 6 Considérons $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1; 2)$ et $v = (a; 4)$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\text{Vect}\{u, v\}$.

Théorème-Définition 3 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E .

$\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Cet espace vectoriel est le plus petit espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, appelé sous-espace vectoriel engendré par $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exercice 7 Montrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, u = (\alpha - \beta, 2\alpha - 2\beta + \gamma, -\alpha + \beta + 2\gamma)\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

III.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition 4 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .
La somme de F et G est l'espace vectoriel, noté $F + G$, défini par

$$F + G = \{u \in E / u = f + g \text{ où } f \in F \text{ et } g \in G\}$$

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

REMARQUE 9 : Cet espace est le plus petit espace contenant F et G .

Exercice 8 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . A quelle condition a-t-on $F + G = F$?

III.6 Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

DÉFINITION 13 : (somme directe de deux s.e.v.)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E . On dit que la somme $F + G$ est directe si

$$F \cap G = \{\vec{0}\}$$

On note alors : $F \oplus G$.

Théorème 5 : (Caractérisation des sommes directes)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La somme $F + G$ est directe.
2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
3. Tout vecteur s de $F + G$ s'écrit de **manière unique** $s = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Démonstration (2) $\Leftrightarrow$ (3) :

REMARQUE 10 : Pour établir que $S = F \oplus G$, il est souvent commode de prouver que :

- F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .
- L'unicité de la décomposition $s = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$ sous réserve d'existence
- L'existence de la décomposition $s = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$ pour tout $s \in S$

DÉFINITION 14 : (Généralisation)

Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v. de E .

On dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe lorsque tout vecteur de cette somme s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + \dots + u_p$ avec $u_i \in F_i$, $1 \leq i \leq p$.

La somme est alors notée $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ voire $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$.

DÉFINITION 15 : (s.e.v. supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel.

On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$

i.e. tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Exercice 9 Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ et celui $\mathcal{P}$ des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$).

IV La dimension finie

IV.1 Familles génératrices - Dimension

DÉFINITION 16 : (Familles génératrices finies)

Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est génératrice de E si

$$E = \text{Vect} \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Ainsi, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de E si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des e_i .

Conséquence :

Toute partie de E contenant une partie génératrice est elle-même une partie génératrice (de E).

Exercice 10 Soient $e_1 = (1; 1; 1)$, $e_2 = (1; 2; 3)$ et $e_3 = (2; 3; 4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

DÉFINITION 17 : (Espace de dimension finie)

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.
Sinon, il est de dimension infinie.

IV.2 Familles libres, familles liées

DÉFINITION 18 : Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est libre (ou "les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants") si :

toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de E a ses coefficients nécessairement tous nuls

i.e. $\sum_{i=1}^n \lambda e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0$. La famille est dite liée lorsqu'elle n'est pas libre (on dit également que les vecteurs sont linéairement dépendants).

Théorème 6 : La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exercice 11 Montrer que : $e_1 = (1; 0)$ et $e_2 = (1; 1)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 14 La famille $(X^i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12 Soient f_1, f_2, f_3 des fonctions définies par

$$f_1(x) = 1 \quad ; \quad f_2(x) = \cos x \quad ; \quad f_3(x) = \sin x$$

Montrer que la famille $(f_1; f_2; f_3)$ est libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (noté $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$).

Théorème 7 :

1. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2. La famille (u, v) est liée si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.
3. Toute partie d'une famille libre est libre.
4. Toute famille contenant une famille liée est liée.
5. Si la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre et si $e_{n+1} \notin \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$ est également libre.

Démonstration du dernier point :

REMARQUE 11 : Famille libre et déterminant (très utile pour certains exercices)

Étant donnée une matrice A carrée d'ordre n , pour déterminer si la famille de ses vecteurs lignes est libre ou non, on peut utiliser le déterminant.

En effet, le déterminant de A est nul si et seulement si un de ses vecteurs ligne est combinaison linéaire des autres, autrement dit si et seulement si la famille des vecteurs lignes est liée.

Exercice 13 Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Théorème 8 : Si E est un espace de dimension finie et si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de E alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $(n + 1)$ est une famille liée.

Démonstration : (par récurrence sur n)

Pour $n = 1$ on a $E = \text{Vect}\{e_1\}$. Soient x et y deux éléments de E . Il existe α et β réels tels que $x = \alpha e_1$ et $y = \beta e_1$.

Si $\alpha = 0$ alors (x, y) est liée, sinon $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ ce qui induit que (x, y) est liée.

Supposons que la propriété est vraie pour un entier n quelconque et soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une famille génératrice de E .

Soit $(y_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ une famille de vecteurs de E .

Notons $F = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Si tous les vecteurs y_i appartiennent à F alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ est liée.

Sinon, supposant, par exemple, que $y_{n+2} \notin F$. Il existe donc $\lambda_{n+2} \neq 0$ tel que

$$y_{n+2} = u_{n+2} + \lambda_{n+2}x_{n+1} \quad (1)$$

avec $u_{n+2} \in F$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1; n+2 \rrbracket$, il existe un scalaire λ_j et un vecteur $u_j \in F$ tel que

$$y_j = u_j + \lambda_j x_{n+1} \quad (2)$$

Or, (1) nous donne $x_{n+1} = \frac{y_{n+2} - u_{n+2}}{\lambda_{n+2}}$ donc, pour tout $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on a

$$y_j = u_j + \lambda_j \frac{y_{n+2} - u_{n+2}}{\lambda_{n+2}}$$

Il s'avère que la famille $\left(u_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}u_{n+2}\right)_{1 \leq j \leq n+1}$ est constituée de $n+1$ vecteurs de F dont une famille génératrice est constitué de n éléments.

D'après l'hypothèse de récurrence, cette famille est donc liée ce qui induit, d'après (2), que la famille $\left(y_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}y_{n+2}\right)_{1 \leq j \leq n+1}$ est liée dans E . La famille $y_1, \dots, y_{n+2}$ est donc liée dans E . □

Théorème 9 : Si E est de dimension finie et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre alors toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.

Démonstration : Supposons qu'il existe une famille génératrice contenant moins de n vecteurs.

D'après le théorème précédent, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ serait liée ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. □

IV.3 Bases

DÉFINITION 19 : Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille B est une **base** de E si B est **libre** et **génératrice** de E .

Exemple 15 La famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème-Définition 5 : Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une famille de vecteurs de E . B est une base de E si et seulement si tout vecteur u de E s'exprime linéairement et de façon unique en fonction des vecteurs $e_1, \dots, e_n$
i.e. il existe un unique n -uplet de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

Sous ces conditions, $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ constituent les coordonnées du vecteur u dans la base B ce que nous noterons :

$$\text{Coord}_B(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Coord}_B(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Théorème-Définition 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E et se note $\dim(E)$.

Démonstration : Soit $B = (e_1; \dots; e_n)$ une base de E .

Cette famille est libre donc toute famille génératrice contient au moins n vecteurs.

Cette famille est également génératrice donc toute famille libre contient au plus n vecteurs.

Finalement, toute base de E contient exactement n vecteurs.

□

Certains espaces de référence admettent des bases de référence dénommées "bases canoniques". Décrivons les plus courantes.

DÉFINITION 20 : (Bases canoniques)

- On désigne par base canonique de $\mathbb{R}^n$ la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où e_i est le n -uplet dont les termes sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.
- On désigne par base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$.

Application : $\dim(\mathbb{R}^n) = \dots$; $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dots$ et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \dots$

Théorème 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq n$.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq n$.

Théorème 11 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E .
- B est libre de cardinal n .
- B est génératrice de cardinal n .

Démonstration : Il est évident que (a) $\Rightarrow$ (b).

Montrons (b) $\Rightarrow$ (c) : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre de cardinal n alors, pour tout x appartenant à E , la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$, de cardinal $n + 1$, est liée. x appartient donc à $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ ce qui permet de conclure que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. Montrons (c) $\Rightarrow$ (a) : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de cardinal n alors on peut extraire une famille qui sera libre de cardinal maximal. Ce sera alors une base de E de dimension n . Ainsi, cette famille extraite correspond à $\mathcal{B}$ qui est donc une base de E . □

Théorème 12 : (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel, G une partie génératrice de E et L une partie libre.
Il existe $F \subset G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E .

Exercice 14 Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 13 : (Espaces supplémentaires et dimension)

Soient F et G deux s.e.v. d'un espace E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F et G sont supplémentaires dans E .
- (ii) La somme $F + G$ est directe et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- (iii) $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration : Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii). Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Soit $\mathcal{B}$ une base de F . On peut trouver une base $\mathcal{B}'$ de G telle que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est libre et de cardinal n . Elle forme donc une base de E qui induit que $E = F + G$.

Il reste à prouver que (iii) $\Rightarrow$ (i).

En utilisant les notations précédentes, $E = F + G$ implique que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est de cardinal n et génératrice de E . Elle est donc libre (base) ce qui permet de conclure que F et G sont en somme directe.

Théorème 14 : (Formule de Grassmann)

Si F et G sont deux s.e.v. d'un espace E de dimension finie alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration : Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . On a donc $F = H \oplus F \cap G$ ce qui conduit, d'après le théorème précédent à $\dim(H) + \dim(F \cap G) = \dim(F)$.

En outre, H et G ont une intersection réduite à $\{0_E\}$ et tout vecteur $x \in F + G$ peut s'écrire

$$x = x_F + x_G = x_H + x_{F \cap G} + x_G$$

donc $H \oplus G = F + G$. On en déduit que $\dim(F + G) = \dim(H) + \dim(G)$.

Les deux relations sur les dimensions conduisent à $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(F + G) - \dim(G)$ soit $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

V Applications linéaires

V.1 Injection, Surjection, Bijection d'une application

DÉFINITION 21 : $f : E \rightarrow F$ est une injection (ou f est injective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent.

Exemple 16

- $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est injective.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas injective.

Théorème 15 : $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

DÉFINITION 22 : $f : E \rightarrow F$ est une surjection (ou f est surjective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Exemple 17

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est surjective.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.
- Si $g : E \rightarrow F$ est une application alors f induit une surjection entre E et $f(E) = \text{Im}(f)$.

DÉFINITION 23 : $f : E \rightarrow F$ est une bijection (ou f est bijective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.

Exemple 18

- $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$ est bijective.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas bijective.

V.2 Généralités sur les applications linéaires

DÉFINITION 24 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F . On dit que f est linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels) si :

- (i) $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$. L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

REMARQUE 12 : Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme $f : x \mapsto ax$ car $f(x) = f(x.1) = xf(1)$.

Conséquences : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- $f(0_E) = 0_F$
- $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$.

Démonstration du premier point :

Exercice 15

Montrer que $\phi : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est une application linéaire définie sur l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$.

DÉFINITION 25 : Soient E et F deux espaces vectoriels.

- On désigne par endomorphisme de E , toute application linéaire de E vers lui-même.
L'ensemble des endomorphisme de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- On désigne par isomorphisme de E vers F , toute application linéaire bijective de E vers F .
- On désigne par automorphisme de E , toute application linéaire bijective E vers lui-même.
- On désigne par "Identité de E ", notée id_E , l'endomorphisme de E défini par :
 $\forall u \in E, id_E(u) = u$.

DÉFINITION 26 : (Représentation matricielle d'une application linéaire) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n . Soient $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2; \dots; e'_n)$ une base de F . Toute application linéaire f de E vers F est caractérisée par une matrice, notée ${}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} mat(f)$ à n lignes et p colonnes dont le terme a_{ij} situé à la i^{eme} ligne et à la j^{eme} colonne est la i^{eme} coordonnée dans la base $\mathcal{B}'$ de $f(e_j)$. Cette matrice, appelée matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ se construit ainsi :

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_p) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_n \end{array} \end{array}$$

Exercice 16 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (3x - 5y + z, 2x + y - 3z)$$

Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques associées.

REMARQUE 13 : Dans le cas d'un endomorphisme, on choisit en général la même base pour les espaces de départ et d'arrivée.

Exercice 17 Déterminer l'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$${}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 14 : Soit E un espace vectoriel de dimension n , de base $\mathcal{B}$.
L'identité de E , notée id_E , a pour représentation matricielle I_n .

Théorème 16 : (Composée d'applications et représentation matricielle)
Soit $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G , soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$${}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} \text{mat}(g \circ f) = {}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} \text{mat}(g) \times {}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}(f)$$

Théorème 17 : (Relation fondamentale)

Soit $x \in E$ et $y \in F$ tel que $y = f(x)$.

Considérons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes donnant les composantes de x et y dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En posant $A = {}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}(f)$, on a la relation suivante

$$Y = AX \quad \text{i.e.} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = {}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}(f) \times \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$$

Théorème 18 : (Isomorphisme et matrice) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $f : E \rightarrow F$ étant une application linéaire de matrice associée $M = {}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}(f)$.

f est un isomorphisme si et seulement si M est inversible i.e ($\det(M) \neq 0$).

Dans ce cas, M^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Explications : Une application linéaire f est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de E .

Ainsi, f est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F .

f est donc un isomorphisme ssi les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants ce qui induit que M est inversible.

V.3 Noyau d'une application linéaire

Théorème-Définition 7 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F . On appelle noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$, le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$$

REMARQUE 15 : 0_E appartient à $\text{Ker}(f)$.

L'injectivité d'une application linéaire f peut-être caractérisée à l'aide de son noyau. En effet :

Théorème 19 : Soit f une application linéaire de E vers F .
 f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ x - 2y + z \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme f .

V.4 Espace Image d'une application linéaire

Théorème-Définition 8 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F . On appelle espace Image de f , noté $\text{Im}(f)$, le sous-espace vectoriel de F défini par

$$\text{Im}(f) = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$$

REMARQUE 16 : $\text{Im}(f) = f(E) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ lorsque $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ est une base de E de dimension finie.

Exercice 19 En reprenant l'exemple précédent, déterminer $\text{Im}(f)$.

REMARQUE 17 : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

DÉFINITION 27 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de $\text{Im}(f)$ est appelée rang de f , notée $\text{rg}(f)$.

Théorème 20 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

Théorème 21 : (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

Démonstration :

Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . On a : $E = \text{Ker}(f) \oplus G$ donc $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(G) = \dim(E)$.

$g : G \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $v(x) = f(x)$ est un isomorphisme donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(G)$.

On en déduit que $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$. □

COROLLAIRE 1 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de **même dimension**. Pour toute application linéaire f de E dans F , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est bijective.

Démonstration :

Exercice 20 (Une autre démonstration de la formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie.

1. En considérant $p : F \times G \rightarrow F$ telle que $p(x, y) \mapsto x$, montrer que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$.
2. En utilisant $f : F \times G \rightarrow F + G$ telle que $f(x, y) \mapsto x - y$, déduire de la question précédente que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

V.5 Rang et représentation matricielle

DÉFINITION 28 : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'un espace vectoriel E . On appelle rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ la dimension du s.e.v. engendré par cette famille. Ainsi :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\})$$

REMARQUE 18 : Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Ainsi, en considérant la matrice M associée à une application linéaire, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut trouver une base de cet espace vectoriel. En effet, les opérations suivantes permettent de transformer M en une nouvelle matrice ayant le même rang :

- Echanger deux lignes
- Multiplier une ligne par un coefficient non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Le pivot de Gauss nous donne alors une matrice dite échelonnée réduite (matrice triangulaire supérieure).

Exercice 21 Déterminer le rang de l'endomorphisme f associé, dans la base canonique, à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

V.6 Changement de bases

DÉFINITION 29 : (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base de E et $S = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle matrice du système S dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},S}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, a_{ij} est la coordonnée sur e_i de x_j .

Exemple 19 Soit $S = (x_1, x_2, x_3)$ avec $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Interprétation de la matrice de passage :

Dans le cas où $p = n$, $S = (x_1, \dots, x_n)$. En considérant $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = x_i$, on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},S} = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f)$$

Théorème 22 : Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

$\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible.

Interprétation de la matrice de passage entre deux bases :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . En considérant $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$, on est amené à exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$. Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\text{mat}}(\text{id}_E)$$

Théorème 23 : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}]^{-1}$$

Théorème 24 : (Formules du changement de bases)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. En posant $X = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(x)$, on a :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' \quad \text{et} \quad X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} X$$

En effet, en considérant $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$ et $\text{id}_E(x) = x$, il vient :

$\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\text{mat}}(\text{id}_E) \times \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(x) = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ d'où la relation $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' = X$.

Théorème 25 : (Changement de bases et endomorphismes)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f)$ et $M' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(f)$ alors

$$M' = P^{-1} \times M \times P$$

En effet, soit $x \in E$ et $y = f(x)$.

Notons $X = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(x)$, $Y = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(y)$ et $Y' = \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(y)$.

D'après ce qui précède, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$.

$Y = MX$ conduit à $PY' = MPX'$ soit $Y' = P^{-1}MPX'$.

De plus, $Y' = M'X'$ donc $P^{-1}MPX' = M'X'$ pour tout vecteur X' . On a donc $P^{-1}MP = M'$.

REMARQUE 19 : En reprenant les notations précédentes, on a également

$$M = P \times M' \times P^{-1}$$

VI Diagonalisation

VI.1 Introduction

Dans cette partie, on étudie exclusivement des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n . L'objectif est de mettre en place des outils permettant de trouver pour cette application une base de E permettant de la représenter par une matrice particulièrement simple ; l'idéal étant de pouvoir représenter cette application par une matrice diagonale.

Autrement dit, on cherche une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E dans laquelle la matrice d'un endomorphisme f est

donnée par
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } f(e'_i) = \lambda_i e'_i$$

A noter qu'une telle base n'existe pas forcément !

VI.2 Valeurs et vecteurs propres

DÉFINITION 30 : Soit x un vecteur non nul de E .

- On dit que x est un vecteur propre de f si $f(x)$ est colinéaire à x
i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / f(x) = \lambda x$.
- λ est alors appelée valeur propre de f associée à x .
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé Spectre de f noté $\text{Sp}(f)$.

REMARQUE 20 :

- Par définition, un vecteur propre est non nul.
- λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, f(x) = \lambda x$.
- On a

$$0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, f(x) = 0_E$$

Ainsi

$$0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ est non injectif}$$

Théorème-Définition 9 : (Lien entre valeur propre et noyau)

- λ est une valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}_E\}$.
- Le noyau $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un s.e.v. de E contenant tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ , appelé sous-espace propre et noté $E_\lambda(f)$.

Exemple 20 $E_0(f) = \text{Ker}(f)$.

DÉFINITION 31 : (Lien avec les matrices)

Soit X un vecteur colonne non nul et M la matrice représentant un endomorphisme f dans une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- On dit que X est un vecteur propre de M si MX est colinéaire à X
i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / MX = \lambda X$.
- λ est appelée valeur propre de M associée à X .
- On note $E_\lambda(f) = \text{Ker}(M - \lambda \text{Id}_n)$.

Exercice 22 On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à une valeur propre que l'on déterminera.
- Vérifier que 3 est une valeur propre de M associée à un espace propre que l'on déterminera.

REMARQUE 21 : D'après les notions vues précédemment, on a :

$$\lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow rg(M - \lambda i_E) < n \Leftrightarrow \det(M - \lambda i_E) = 0$$

Théorème 26 : Les espaces propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \text{Ker}(f - \lambda i_E) \subset E$$

Théorème-Définition 10 : M la matrice représentant un endomorphisme f dans une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- Le polynôme caractéristique de M est défini par

$$\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$$

- Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique.

Démonstration :

REMARQUE 22 :

- Le polynôme caractéristique de M étant de degré $\dots$, M admet au plus $\dots$ valeurs propres.
- Le polynôme caractéristique est indépendant de la base choisie (de E).

Exercice 23 Déterminer les valeurs propres et espaces propres associés de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

VI.3 Diagonalisabilité

Dans cette partie, on ne considère que des endomorphismes n'admettant que des valeurs propres réelles. On considère des endomorphismes ou matrices associées à un espace de dimension n .

DÉFINITION 32 : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est appelée base de diagonalisation de f .

REMARQUE 23 : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à un endomorphisme f est diagonalisable si f est diagonalisable.

Théorème 27 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre :

- (i) f est diagonalisable;
- (ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Exemple 21 Id_E est diagonalisable et toute base de E est base de diagonalisation.

Théorème 28 : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous espaces propres est égale à n .

Démonstration :

COROLLAIRE 2 : Si un endomorphisme admet n valeurs propres (distinctes) alors il est diagonalisable.

En effet :

REMARQUE 24 : Soient f un endomorphisme diagonalisable, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Notons M et D les matrices représentant cet endomorphisme respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a

$$M = PDP^{-1}$$

Exercice 24 Diagonaliser f dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

VI.4 Application 1 : Puissance n -ième d'une matrice

Exercice 25 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n , $n \in \mathbb{N}$.

VI.5 Application 2 : Résolution de systèmes homogènes d'équations différentielles du premier ordre

DÉFINITION 33 : (Exponentielle d'une matrice)

L'exponentielle d'une matrice carrée A , notée $\exp(A)$, est définie par : $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

PROPRIÉTÉ 13 : Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ alors $e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{pmatrix}$.

En effet :

Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}.$$

En considérant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Théorème 29 : Le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ tel que $X(0) = X_0$ admet une unique solution $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(t) = e^{tA}X_0$$

Exercice 26 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ avec $x(0) = y(0) = 1$.

