Année universitaire 2024-2025

Module pour la poursuite d'études : Algèbre linéaire

Semestre 5

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

‘

Table des matières

I Déterminant d'une matrice

I.1 Généralités

Définition 1 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle mineur relatif au terme a_{ij} , noté Δ_{ij}, le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Exemple 1 *Considérons la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le mineur relatif à a_{11} est égal à

Théorème-Définition 1 : (Développement d'un déterminant)
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le déterminant de A noté $\det A$ voire $|A|$ est le nombre réel, défini par récurrence sur n par :

1. si $n = 1$ et $A = (a)$ alors $\det A = a$;
2. si $n \geq 2$ alors
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}$$

Propriété 1 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Quels que soient les indices i et j appartenant à $[\![1; n]\!]$, on a

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}$$

Définition 2 : Le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est appelé cofacteur de a_{ij}.

Remarque 1 :

1. Les signatures $(-1)^{i+j}$ forment un échiquier : $\begin{pmatrix} + & - & + & ... \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ ... & & & ... \end{pmatrix}$.
2. Pour le calcul d'un déterminant, on peut développer par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.
3. Un déterminant est associé à la notion d'application multilinéaire n-alternée.

I.2 Cas des matrices d'ordre 2 et 3

- Cas où $n = 2$:
  Considérons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Cas où $n=3$:

Considérons $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}\Delta_{1j}$ soit

$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Exemple 2 *Calculer les déterminants des matrices définies par* $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 2 : Méthode de Sarrus, **uniquement pour déterminant d'ordre 3**

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. En utilisant la formule précédente, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\,(ei-fh)-b\,(di-fg)+c\,(dh-eg)\,.$$

La méthode de Sarrus consiste à effectuer $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

et le résultat est det(A) $=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi.$

Exemple 3 *Calculer le déterminant de la matrice* $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

I.3 Propriétés des déterminants (admises) :

Propriété 2 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) alors le déterminant de A est égal au produit des coefficients diagonaux de A.

  En particulier, si $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $\det A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_1$.
- $\det(A) = \det({}^t A)$.
- Si la matrice A possède une ligne ou une colonne de 0 alors $\det(A) = 0$.

Propriété 3 : Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un réel.

- La matrice B obtenue à partir de A par multiplication d'une ligne (ou d'une colonne) de A par k vérifie $\det(B) = k\det(A)$.
- La matrice B obtenue à partir de A en échangeant 2 lignes (ou 2 colonnes) de A vérifie $\det(B) = -\det(A)$.
- La matrice B obtenue à partir de A en additionnant un multiple d'une ligne (ou colonne) de A à une autre vérifie $\det(B) = \det(A)$.

Conséquences fondamentales :

- On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (idem pour colonnes).
- Si la matrice A a 2 lignes (ou 2 colonnes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Si une ligne (respectivement colonne) est combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes) alors $\det(\mathrm{A}) = 0$.
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Exercice 1 *Calculer le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Propriété 4 : Critère d'inversibilité d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Propriété 5 : Application au nombre de solutions d'un systèmes
Un système linéaire admet une unique solution si et seulement si le déterminant de la matrice associée est non nul.

I.4 Application des déterminants : Inversion de matrices

Propriété 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La comatrice de A, notée $\mathrm{com}(A)$, est la matrice constituée des cofacteurs de A. On a :

$$A \times {}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) . I_n$$

On rappelle que le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est le cofacteur de a_{ij}.

Propriété 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^t\mathrm{com}(A)$$

Exercice 2 *On considère la matrice définie par* $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Justifier que la matrice* M *est inversible, déterminer* M^{-1} *et en déduire la résolution du système* $(S)\left\{\begin{array}{l} 2x-2y+z=-1 \\ x+y+z=1 \\ 4x-y-z=4 \end{array}\right.$.

II Espaces vectoriels

II.1 Vocabulaire et propriétés élémentaires

Dans tout ce cours, on considère $\mathbb{R}$ comme corps de base.
Ainsi, tous les coefficients (scalaires) sont des nombres réels.
Dans ce qui suit, on considère un ensemble noté E.
Comme il est d'usage en géométrie, un élément de E est appelé vecteur.
Ainsi, un élément u de E peut être également noté $\overrightarrow{u}$.

DÉFINITION 3 : Espace vectoriel
E, ensemble non vide, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-e.v.) lorsque E possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée "$.$") avec les propriétés suivantes :

1. Propriétés donnant une structure de groupe abélien $(E,+)$

- Commutativité : $\forall (u,v) \in E^2, \quad u+v=v+u$
- Associativité : $\forall (u,v,w) \in E^3, \quad (u+v)+w=u+(v+w)$
- Existence d'un élément neutre $u_0 \in E$ (appelé vecteur nul) tel que : $u+u_0=u_0+u=u$
  Le vecteur nul est unique et se note généralement 0_E voire $\overrightarrow{0_E}$.
- Existence, pour tout vecteur u de E, d'un symétrique u' tel que : $u+u'=0_E$.
  On a alors : $u'=-u$ et $u+(-v)=u-v$.

2. Loi . vérifiant : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (u,v) \in E^2$

- $(\lambda+\mu).u=\lambda.u+\mu.u$
- $\lambda.(u+v)=\lambda.u+\lambda.v$
- $\lambda.(\mu.u)=(\lambda\mu).u$
- $1.u=u$

A noter que :

— le point de la notation $\lambda.u$ est en général omis dans l'écriture : $\lambda.u=\lambda u$.

— On écrit toujours les scalaires à gauche des vecteurs dans la multiplication externe.

Conséquences :

— $\forall u \in E, \quad 0.u=\overrightarrow{0}_E$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E, \quad (-\lambda).u=-\lambda.u$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E, \quad \lambda.u=\overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda=0 \quad \text{ou} \quad u=\overrightarrow{0}$

II.2 Espaces vectoriels de référence

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ n espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Posons $E=E_1\times E_2\times .....\times E_n$.
  Soient $u=(a_1,a_2,.......,a_n)$ et $v=(b_1,b_2,.......,b_n)$ deux éléments de E, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  — Considérons la somme des vecteurs u et v, notée $u+v$, défini par : $u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,.......,a_n+b_n)$.
  — La multiplication (externe) de u par λ, notée $\lambda.u$ étant définie par : $\lambda.u=(\lambda a_1,\lambda a_2,.......,\lambda a_n)$.
  Ces deux opérations confèrent à E une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  Ainsi, en considérant $E_i=\mathbb{R}$, on a : $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'addition des polynômes et leur multiplication par un scalaire confèrent à l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II.3 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

DÉFINITION 4 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

— F est inclus dans E.

— F est non vide.

— F est stable par addition i.e. $\forall (u,v) \in F^2, \quad u+v \in F$.

— F est stable pour la multiplication par un scalaire i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in F, \quad \lambda u \in F$.

Exemple 4

— $\left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$ *et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

— *L'espace des suites réelles bornées est un s.e.v. de l'espace des suites réelles.*

— $\mathbb{R}^+$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.*

Exercice 3 *L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) définies sur $\mathbb{R}$ est-il un s.e.v. de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?*

Théorème 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

— F est inclus dans E.

— F est non vide.

— F est stable par combinaison linéaire i.e. $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda u + \mu v \in F$

Exercice 4 *Les ensembles* $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\right\}$ *et* $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\right\}$ *sont-ils des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$ *?*

Théorème 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors leur intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

REMARQUE 3 :

1. En général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car on n'a pas $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Théorème 3 : Soit n un entier naturel non nul.
Les polynômes de degré inférieur ou égal à n constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, noté $\mathbb{R}_n[X]$.

II.4 Combinaisons linéaires. Sous-espace engendré

DÉFINITION 5 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, tout vecteur x pour lequel il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est noté $\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\}$.

Exemple 5
Si $x \in E \setminus \{0_E\}$ alors $Vect\{x\} = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v. de E (appelé droite vectorielle engendrée par x).

Exercice 5 *Considérons $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1;2)$ et $v = (a;4)$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $Vect\{u, v\}$.*

Théorème-Définition 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E.
$\text{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Cet espace vectoriel est le plus petit espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, appelé sous-espace vectoriel engendré par $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

Exercice 6 *Montrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, u = (\alpha - \beta, 2\alpha - 2\beta + \gamma, -\alpha + \beta + 2\gamma)\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.*

II.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Théorème-Définition 3 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.
La somme de F et G est l'espace vectoriel, noté $F+G$, défini par

$$F+G=\{u\in E\,/\,u=f+g \quad \text{où } f\in F \; et \; g\in G\}$$

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 4 : Cet espace est le plus petit espace contenant F et G.

Exercice 7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. A quelle condition a-t-on $F+G=F$?*

II.6 Sommes directes et sous-espaces supplémentaires

Définition 6 : (somme directe de deux s.e.v.)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. On dit que la somme $F+G$ est directe si

$$F\cap G=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

On note alors : $F\oplus G$.

Théorème 4 : (Caractérisation des sommes directes)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La somme $F+G$ est directe.
2. $F\cap G=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
3. Tout vecteur s de $F+G$ s'écrit de **manière unique** $s=f+g \quad$ avec $f\in F \; et \; g\in G$.

Démonstration (2) $\Leftrightarrow$ (3) :

REMARQUE 5 : Pour établir que $S = F \oplus G$, il est souvent commode de prouver que :

— F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.

— L'unicité de la décomposition $s = f + g \quad$ où $f \in F$ *et* $g \in G$ sous réserve d'existence

— L'existence de la décomposition $s = f + g \quad$ où $f \in F$ *et* $g \in G$ pour tout $s \in S$

DÉFINITION 7 : (Généralisation)
Soient $F_1, \cdots, F_p$ des s.ev. de E.
On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe lorsque tout vecteur de cette somme s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + \cdots + u_p$ avec $u_i \in F_i$, $1 \leq i \leq p$.
La somme est alors notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ voire $\underset{1\leq i\leq p}{\oplus} F_i$.

DÉFINITION 8 : (s.e.v. supplémentaires)
Soit E un espace vectoriel.
On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$
i.e. tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 8 *Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ et celui $\mathcal{P}$ des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$).*

III Espaces vectoriels de dimension finie

III.1 Familles génératrices - Dimension d'un espace vectoriel

Définition 9 : (Familles génératrices finies)
Une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est génératrice de E si

$$E = \text{Vect}\,\{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Ainsi, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de E si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des e_i.

Conséquence :
Toute partie de E contenant une partie génératrice est elle-même une partie génératrice (de E).

Exercice 9 *Soient* $e_1 = (1; 1; 1)$, $e_2 = (1; 2; 3)$ *et* $e_3 = (2; 3; 4)$ *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.
La famille (e_1, e_2, e_3) *est-elle génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Définition 10 : (Espace de dimension finie)
Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.
Sinon, il est de dimension infinie.

III.2 Familles libres, familles liées

Définition 11 : Une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est libre (ou "les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ sont linéairement indépendants") si :
toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de E a ses coefficients nécessairement tous nuls
i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], \lambda_i = 0$. La famille est dite liée lorsqu'elle n'est pas libre (on dit également que les vecteurs sont linéairement indépendants).

Théorème 5 : La famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exercice 10 *Montrer que :* $e_1 = (1;0)$ *et* $e_2 = (1;1)$ *sont linéairement indépendants dans* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 6 *La famille* $\left(X^i\right)_{0\leq i\leq n}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 *Soient* f_1, f_2, f_3 *des fonctions définies par*

$$f_1(x) = 1 \quad ; \quad f_2(x) = \cos x \quad ; \quad f_3(x) = \sin x$$

Montrer que la famille $(f_1; f_2; f_3)$ *est libre dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *(noté* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$*).*

Théorème 6 :

1. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2. La famille (u, v) est liée si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.
3. Toute partie d'une famille libre est libre.
4. Toute famille contenant une famille liée est lieé.
5. Si la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre et si $e_{n+1} \notin \text{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ alors la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1})$ est également libre.

Démonstration du dernier point :

REMARQUE 6 : Famille libre et déterminant (très utile pour certains exercices)
Etant donnée une matrice A carrée d'ordre n, pour déterminer si la famille de ses vecteurs lignes est libre ou non, on peut utiliser le déterminant.
En effet, le déterminant de A est nul si et seulement si un de ses vecteurs ligne est combinaison linéaire des autres, autrement dit si et seulement si la famille des vecteurs lignes est liée.

Exercice 12 *Les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ *sont-ils linéairement indépendants ?*

Théorème 7 : Si E est un espace de dimension finie et si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de E alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $(n+1)$ est une famille liée.

Démonstration : (par récurrence sur n)
Pour $n=1$ on a $E=\mathrm{Vect}\{e_1\}$. Soient x et y deux éléments de E. Il existe α et β réels tels que $x=\alpha e_1$ et $y=\beta e_1$.
Si $\alpha=0$ alors (x,y) est liée, sinon $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ ce qui induit que (x,y) est liée.
Supposons que la propriété est vraie pour un entier n quelconque et soit $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une famille génératrice de E.
Soit $(y_i)_{1\leq i\leq n+2}$ une famille de vecteurs de E.
Notons $F=\mathrm{Vect}\,\{e_1,\cdots,e_n\}$.
Si tous les vecteurs y_i appartiennent à F alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(y_i)_{1\leq i\leq n+2}$ est liée.
Sinon, supposant, par exemple, que $y_{n+2}\notin F$. Il existe donc $\lambda_{n+2}\neq 0$ tel que

$$y_{n+2}=u_{n+2}+\lambda_{n+2}x_{n+1} \tag{1}$$

avec $u_{n+2}\in F$.Ainsi, pour tout $j\in[\![1;n+2]\!]$, il existe un scalaire λ_j et un vecteur $u_j\in F$ tel que

$$y_j=u_j+\lambda_j x_{n+1} \tag{2}$$

Or, (1) nous donne $x_{n+1}=\frac{y_{n+2}-u_{n+2}}{\lambda_{n+2}}$ donc, pour tout $j\in[\![1;n+1]\!]$, on a

$$y_j=u_j+\lambda_j\frac{y_{n+2}-u_{n+2}}{\lambda_{n+2}}$$

Il s'avère que la famille $\left(u_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}u_{n+2}\right)_{1\leq j\leq n+1}$ est constituée de $n+1$ vecteurs de F dont une famille génératrice est constitué de n éléments.
D'après l'hypothèse de récurrence, cette famille est donc liée ce qui induit, d'après (2), que la famille $\left(y_j-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+2}}y_{n+2}\right)_{1\leq j\leq n+1}$ est liée dans E. La famille $y_1,\cdots,y_{n+2}$ est donc liée dans E.

$\square$

Théorème 8 : Si E est de dimension finie et si $(e_1,\cdots,e_n)$ est une famille libre alors toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.

Démonstration : Supposons qu'il existe une famille génératrice contenant moins de n vecteurs.
D'après le théorème précédent, la famille $(e_1,\cdots,e_n)$ serait liée ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

$\square$

III.3 Bases

DÉFINITION 12 : Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1; e_2; .....; e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $\mathcal{B}$ est une **base** de E si B est **libre** et **génératrice** de E.

Exemple 7 *La famille* $(1, X, X^2, X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème-Définition 4 : Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1; e_2; .....; e_n)$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur u de E s'exprime linéairement et de façon unique en fonction des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$
i.e. il existe un unique n-uplet de scalaires $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Sous ces conditions, $(\alpha_1; \alpha_2; .....; \alpha_n)$ constituent les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ ce que nous noterons :

$$\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \left|\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Théorème-Définition 5 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E et se note $\dim(E)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = (e_1; \cdots; e_n)$ une base de E.
Cette famille est libre donc toute famille génératrice contient au moins n vecteurs.
Cette famille est également génératrice donc toute famille libre contient au plus n vecteurs.
Finalement, toute base de E contient exactement n vecteurs.

□

Certains espaces de référence admettent des bases de référence dénommées "bases canoniques". Décrivons les plus courantes.

DÉFINITION 13 : (Bases canoniques)

- On désigne par base canonique de $\mathbb{R}^n$ la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ où e_i est le n-uplet dont les termes sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1.
- On désigne par base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, ..., X^n)$.

Application : $\dim(\mathbb{R}^n) = \ldots..$; $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \ldots..$ et $\dim \mathcal{M}_{\mathrm{n,p}}(\mathbb{R}) = \ldots\ldots.$

Théorème 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E alors card$(\mathcal{F}) \leq$ n.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E alors card$(\mathcal{F}) \geq$ n.

Théorème 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{B}$ est une base de E.
(b) $\mathcal{B}$ est libre de cardinal n.
(c) $\mathcal{B}$ est génératrice de cardinal n.

Démonstration : Il est évident que (a)⇒(b).

Montrons (b)$\Rightarrow$(c) : Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est libre de cardinal n alors, pour tout x appartenant à E, la famille $(e_1, \cdots, e_n, x)$, de cardinal $n+1$, est liée. x appartient donc à $\mathrm{Vect}\{\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ ce qui permet de conclure que $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice. Montrons (c)$\Rightarrow$(a) : Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est gérératrice de cardinal n alors on peut extraire une famille qui sera libre de cardinal maximal. Ce sera alors une base de E de dimension n.
Ainsi, cette famille extraite correspond à $\mathcal{B}$ qui est donc une base de E.

□

Théorème 11 : (Théorème de la base incomplète)
Soit E un espace vectoriel, G une partie génératrice de E et L une partie libre.
Il existe $F \subset G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E.

Exercice 13 *Soient $u = (1,1)$ et $v = (1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.*
Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 12 : (Espaces supplémentaires et dimension)
Soient F et G deux s.e.v. d'un espace E de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires dans E.

(ii) La somme $F + G$ est directe et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

(iii) $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration : Il est clair que (i)$\Rightarrow$ (ii). Montrons (ii)$\Rightarrow$ (iii).
Soit $\mathcal{B}$ une base de F. On peut trouver une base $\mathcal{B}'$ de F telle que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est libre et de cardinal n. Elle forme donc une base de E qui induit que $E = F + G$.
Il reste à prouver que (iii)$\Rightarrow$ (i).
En utilisant les notations précédentes, $E = F + G$ implique que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est de cardinal n et génératrice de E. Elle est donc libre (base) ce qui permet de conclure que F et G sont en somme directe.

Théorème 13 : (Formule de Grassmann)
Si F et G sont deux s.e.v. d'un espace E de dimension finie alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration : Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. On a donc $F = H \oplus F \cap G$ ce qui conduit, d'après le théorème précédent à $\dim(H) + \dim(F \cap G) = \dim(F)$.
En outre, H et G ont une intersection réduite à $\{0_E\}$ et tout vecteur $x \in F + G$ peut s'écrire

$$x = x_F + x_G = x_H + x_{F\cap G} + x_G$$

donc $H \oplus G = F + G$. On en déduit que $\dim(F + G) = \dim(H) + \dim(G)$.
Les deux relations sur les dimensions conduisent à $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(F + G) - \dim(G)$ soit $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

□

IV Applications linéaires

IV.1 Application injective, surjective, bijective

Définition 14 : L'application $f : E \to F$ est une injection (ou f est injective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent.

Exemple 8

— *$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est injective.*
— *$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective.*
— *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas injective.*

Théorème 14 : $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Définition 15 : $f : E \to F$ est une surjection (ou f est surjective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Exemple 9

— *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est surjective.*
— *$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.*
— *Si $g : E \to F$ est une application alors f induit une surjection entre E et $f(E) = Im(f)$.*

Définition 16 : $f : E \to F$ est une bijection (ou f est bijective) si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.

Exemple 10

— *$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.*
— *$exp : \mathbb{R} \to]0; +\infty[$ est bijective.*
— *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas bijective.*

IV.2 Généralités sur les applications linéaires

Définition 17 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F. On dit que f est linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si :
(i) $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$
(ii) $\forall \lambda \in$ R, $\forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$. L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque 7 : Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme $f : x \mapsto ax$ car $f(x) = f(x.1) = xf(1)$.

Conséquences : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors
— $f(0_E) = 0_F$
— $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$.

Démonstration du premier point :

Exercice 14

Montrer que $\phi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ *est une application linéaire définie sur l'espace des fonctions continues sur* $[0;1]$.

Définition 18 : Soient E et F deux espaces vectoriels.

- On désigne par endomorphisme de E, toute application linéaire de E vers lui-même.
  L'ensemble des endomorphisme de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- On désigne par isomorphisme de E vers F, toute application linéaire bijective de E vers F.
- On désigne par automorphisme de E, toute application linéaire bijective E vers lui-même.
- On désigne par "Identité de E", notée id_E, l'endomorphisme de E défini par :
  $\forall u \in E, \quad id_E(u) = u$.

Définition 19 : (Représentation matricielle d'une application linéaire) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathcal{B} = (e_1; e_2; .....; e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1; e'_2; .....; e'_n)$ une base de F.
Toute application linéaire f de E vers F est caractérisée par une matrice, notée $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f)$ à n lignes et p colonnes dont le terme a_{ij} situé à la i^{eme} ligne et à la j^{eme} colonne est la i^{eme} coordonnée dans la base $\mathcal{B}'$ de $f(e_j)$.
Cette matrice, appelée matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ se construit ainsi :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_n \end{array} \end{array}$$

Exercice 15 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (3x - 5y + z, 2x + y - 3z)$$

Déterminer la matrice de f *dans les bases canoniques associées.*

REMARQUE 8 : Dans le cas d'un endomorphisme, on choisit en général la même base pour les espaces de départ et d'arrivée.

Exercice 16 *Déterminer l'application* $g : \mathbb{R}^2 \to R^2$ *telle que*

$$\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}$.
L' Identité de E, notée id_E, a pour représentation matricielle I_n.

Théorème 15 : (Composée d'applications et représentation matricielle)
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}$" une base de G, soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}"}{mat}(g \circ f) = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}"}{mat}(g) \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f)$$

Théorème 16 : (Relation fondamentale)
Soit $x \in E$ et $y \in F$ tel que $y = f(x)$.
Considérons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes donnant les composantes de x et y dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En posant $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f)$, on a la relation suivante

$$Y = AX \quad \text{i.e.} \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f) \times \text{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$$

Théorème 17 : (Isomorphisme et matrice) Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $f : E \to F$ étant une application linéaire de matrice associée $M = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{mat}(f)$.
f est un isomorphisme si et seulement si M est inversible i.e $(\det(M) \neq 0)$.
Dans ce cas, M^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Explications : Une application linéaire f est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de E.
Ainsi, f est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.
f est donc un isomorphisme ssi les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants ce qui induit que M est inversible.

IV.3 Noyau d'une application linéaire

Théorème-Définition 6 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linaire de E vers F.
On appelle noyau de f, noté $\text{Ker}(f)$, le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\text{Ker }(f) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\}$$

Remarque 10 : 0_E appartient à $\text{Ker }(f)$.

L'injectivité d'une application linéaire f peut-être caractérisée à l'aide de son noyau. En effet :

Théorème 18 : Soit f une application linéaire de E vers F.
f est injective si et seulement si $\text{Ker }(f) = \{0_E\}$.

Exercice 17 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ x-2y+z \\ x-3y+2z \end{pmatrix}$. *Déterminer le noyau de l'endomorphisme* f.

IV.4 Espace Image d'une application linéaire

Théorème-Définition 7 : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linaire de E vers F.
On appelle espace Image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, le sous-espace vectoriel de F défini par

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F / \ \exists x \in E, \ f(x) = y\}$$

Remarque 11 : $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ lorsque $\mathcal{B} = (e_1; e_2; .....; e_n)$ est une base de E de dimension finie.

Exercice 18 *En reprenant l'exemple précédent, déterminer Im(f).*

Remarque 12 : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

Définition 20 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
La dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ est appelée rang de f, notée $\mathrm{rg}\,(f)$.

Théorème 19 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Théorème 20 : (Théorème du rang)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) = \dim(E)$$

Démonstration :
Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f)$ dans E. On a : $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus G$ donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(G) = \dim(E)$.
$g : G \to \mathrm{Im}(f)$ définie par $v(x) = f(x)$ est un isomorphisme donc $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(G)$.
On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) = \dim(E)$.

$\square$

Corollaire 1 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de **même dimension**.
Pour toute application linéaire f de E dans F, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

Démonstration :

Exercice 19 *(Une autre démonstration de la formule de Grassmann)*

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie.

1. *En considérant $p : F \times G \to F$ telle que : $p(x, y) \mapsto x$, montrer que :* $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$.
2. *En utilisant $f : F \times G \to F + G$ telle que : $f(x, y) \mapsto x - y$, déduire de la question précédente que :* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

IV.5 Rang et représentation matricielle

Définition 21 : Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille d'un espace vectoriel E. On appelle rang de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ la dimension du s.e.v. engendré par cette famille. Ainsi :

$$\mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n) = \dim(\mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\})$$

Remarque 13 : Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; .....; e_n)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Vect}\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}) = \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Ainsi, en considérant la matrice M associée à une application linéaire, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut trouver une base de cet espace vectoriel. En effet, les opérations suivantes permettent de transformer M en une nouvelle matrice ayant le même rang :

— Echanger deux lignes

— Multiplier une ligne par un coefficient non nul

— Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Le pivot de Gauss nous donne alors une matrice dite échelonnée réduite (matrice triangulaire supérieure).

Exercice 20 *Déterminer le rang de l'endomorphisme f associé, dans la base canonique, à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

IV.6 Changement de bases

DÉFINITION 22 : (Matrice de passage)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1; e_2; .....; e_n)$ une base de E et $S = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice du système S dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, a_{ij} est la coordonnée sur e_i de x_j.

Exemple 11 *Soit $S = (x_1, x_2, x_3)$ avec $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,0,1)$ dans la base $\mathcal{B}$.On a :*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Interprétation de la matrice de passsage :
Dans le cas où $p = n$, $S = (x_1, \cdots, x_n)$. En considérant $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = x_i$, on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \underset{\mathcal{B}}{mat}(f)$$

Théorème 21 : Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible.

Interprétation de la matrice de passage entre deux bases :
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. En considérant $id_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$, on est amené à exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$. Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{mat}(Id_E)$$

Théorème 22 : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}]^{-1}$$

Théorème 23 : (Formules du changement de bases)
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. En posant $X = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(x)$, on a :

$$X = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' \quad \text{et} \quad X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} X$$

En effet, en considérant $id_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$ et $id_E(x) = x$, il vient :
$\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{mat}(Id_E) \times \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ d'où la relation $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' = X$.

Théorème 24 : (Changement de bases et endomorphismes)
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \underset{\mathcal{B}}{mat}(f)$ et $M' = \underset{\mathcal{B}'}{mat}(f)$ alors

$$M' = P^{-1} \times M \times P$$

En effet, soit $x \in E$ et $y = f(x)$.
Notons $X = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(x)$, $Y = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(y)$ et $Y' = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(y)$.
D'après ce qui précède, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$.
$Y = MX$ conduit à $PY' = MPX'$ soit $Y' = P^{-1}MPX'$.
De plus, $Y' = M'X'$ donc $P^{-1}MPX' = M'X'$ pour tout vecteur X'. On a donc $P^{-1}MP = M'$.

REMARQUE 14 : En reprenant les notations précédentes, on a également

$$M = P \times M' \times P^{-1}$$

V Diagonalisation

V.1 Introduction

Dans cette partie, on étudie exclusivement des endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. L'objectif est de mettre en place des outils permettant de trouver pour cette application une base de E permettant de la représenter par une matrice particulièrement simple ; l'idéal étant de pouvoir représenter cette application par une matrice diagonale.

Autrement dit, on cherche une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de E dans laquelle la matrice d'un endomorphisme f est donnée par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $f(e'_i) = \lambda_i e'_i$

A noter qu'une telle base n'existe pas forcement !

V.2 Valeurs et vecteurs propres

Définition 23 : Soit x un vecteur non nul de E.

- On dit que x est un vecteur propre de f si $f(x)$ est colinéaire à x i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \ f(x) = \lambda x$.
- λ est alors appelée valeur propre de f associée à x.
- L'ensemble des valeurs propres de f est appelé Spectre de f noté $\mathrm{Sp}\,(f)$.

Remarque 15 :

- Par définition, un vecteur propre est non nul.
- λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E,\ f(x) = \lambda x$.
- On a
$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E,\ f(x) = 0_E$$
Ainsi
$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ est non injectif}$$

Théorème-Définition 8 : (Lien entre valeur propre et noyau)

- λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E) \neq \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$.
- Le noyau $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$ est un s.e.v. de E contenant tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ, appelé sous-espace propre et noté $E_\lambda(f)$.

Exemple 12 $E_0(f) = Ker(f)$.

Définition 24 : (Lien avec les matrices)
Soit X un vecteur colonne non nul et M la matrice représentant un endomorphisme f dans une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

- On dit que X est un vecteur propre de M si MX est colinéaire à X i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \ MX = \lambda X$.
- λ est appelée valeur propre de M associée à X.
- On note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(M - \lambda Id_n)$.

Exercice 21 *On considère* $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

— *Vérifier que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* M *associé à une valeur propre que l'on déterminera.*

— *Vérifier que 3 est une valeur propre de* M *associée à un espace propre que l'on déterminera.*

Remarque 16 : D'après les notions vues précédemment, on a :

$$\lambda \in Sp\,(M) \Leftrightarrow rg\,(M - \lambda i_E) < n \Leftrightarrow \det\,(M - \lambda i_E) = 0$$

Théorème 25 : Les espaces propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda i_E) \subset E$$

Théorème-Définition 9 : M la matrice représentant un endomorphisme f dans une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

— Le polynôme caractéristique de M est défini par

$$\chi_M\,(X) = \det\,(M - XI_n)$$

— Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique.

Démonstration :

Remarque 17 :
- Le polynôme caractéristique de M étant de degré ..., M admet au plus ... valeurs propres.
- Le polynôme caractéristique est indépendant de la base choisie (de E).

Exercice 22 *Déterminer les valeurs propres et espaces propres associés de la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

V.3 Diagonalisabilité

Dans cette partie, on ne considère que des endomorphismes n'admettant que des valeurs propres réelles. On considère des endomorphismes ou matrices associées à un espace de dimension n.

Définition 25 : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
Une telle base est appelée base de diagonalisation de f.

Remarque 18 : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à un endomorphisme f est diagonalisable si f est diagonalisable.

Théorème 26 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre :
(i) f est diagonalisable ;
(ii) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Exemple 13 *Id_E est diagonalisable et toute base de E est base de diagonalisation.*

Théorème 27 : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous espaces propres est égale à n.

Démonstration :

COROLLAIRE 2 : Si un endomorphisme admet n valeurs propres (distinctes) alors il est diagonalisable.

En effet :

REMARQUE 19 : Soient f un endomorphisme diagonalisable, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Notons M et D les matrices représentant cet endomorphisme respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a

$$M = PDP^{-1}$$

Exercice 23 *Diagonaliser f dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V.4 Application 1 : Puissance n-ième d'une matrice

Exercice 24 *On considère la matrice* $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Calculer* $M^n,\ n \in \mathbb{N}$.

V.5 Application 2 : Résolution de systèmes homogènes d'équations différentielles du premier ordre

DÉFINITION 26 : (Exponentielle d'une matrice)

L'exponentielle d'une matrice carrée A, notée $\exp(A)$, est définie par : $\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

PROPRIÉTÉ 8 : Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{a_n} \end{pmatrix}$.

En effet :

Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{'}(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n^{'}(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{array}\right. .$$

En considérant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Théorème 28 : Le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ tel que $X(0) = X_0$ admet une unique solution $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(t) = \mathrm{e}^{tA} X_0$$

Exercice 25 *Résoudre le système différentiel* $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = 4x - 2y \end{array}\right.$ *avec* $x(0) = y(0) = 1$.