

CORRECTION TEST 2 DE OML

Semestre 3

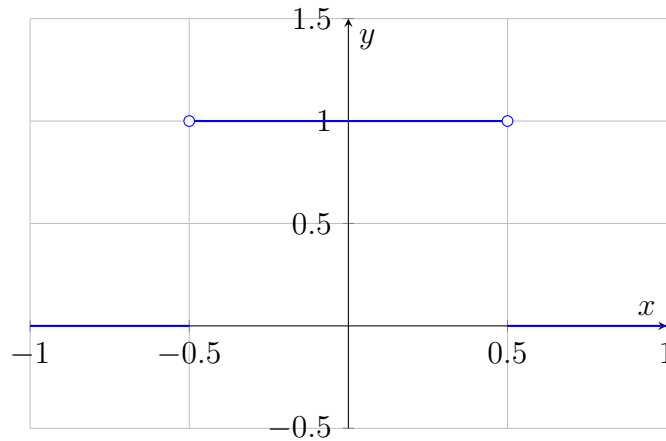
Janvier 2025

Exercice 1 : 11 points

Soit la fonction Π définie sur \mathbb{R} , paire et définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

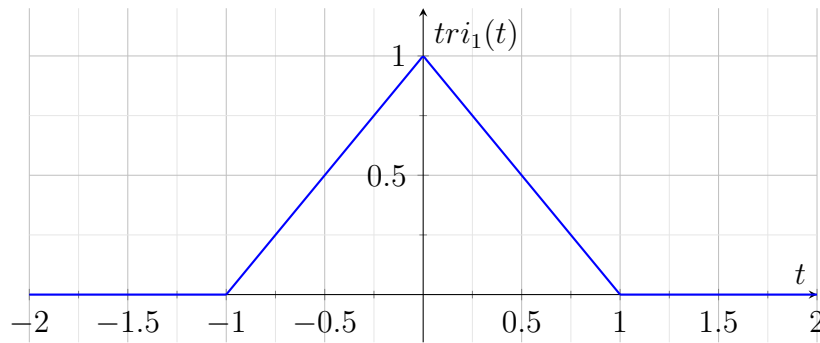
1. (a) Proposer une représentation graphique de Π .



- (b) Calculer la transformée de Fourier de Π , notée $\mathcal{F}\{\Pi\}(f)$, en posant $\omega = 2\pi f$, que l'on exprimera à l'aide d'un sinus cardinal.

$$\mathcal{F}\{\Pi\}(f) = 2 \int_0^{1/2} \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} = \text{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) = \text{sinc}(\pi f)$$

2. On considère maintenant la fonction triangle tri_1 représentée ci-dessous.



- (a) En utilisant la définition de la transformée de Fourier et en faisant une intégration par partie, montrer que

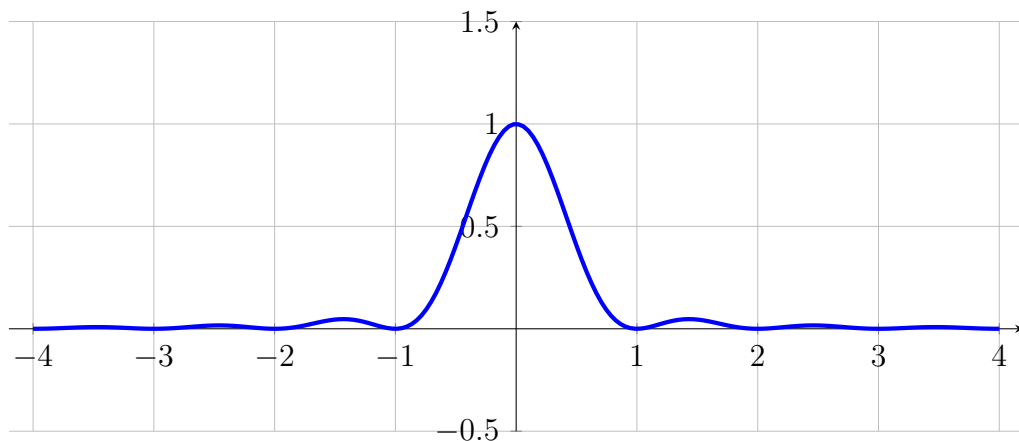
$$\mathcal{F}\{tri_1\}(f) = \text{sinc}^2(\pi f)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{tri_1\}(f) &= 2 \int_0^1 (-t+1) \cos(\omega t) dt \\ \mathcal{F}\{tri_1\}(f) &= 2 \left[(-t+1) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + \frac{2}{\omega} \int_0^1 \sin(\omega t) dt \\ \mathcal{F}\{tri_1\}(f) &= \frac{-2}{\omega} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 = \frac{2}{\omega^2} [1 - \cos(\omega t)]. \\ \mathcal{F}\{tri_1\}(f) &= \frac{4}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \text{sinc}^2(\pi f) \end{aligned}$$

- (b) Donner l'expression du module et de la phase de $\mathcal{F}\{tri_1\}(f)$.
On indiquera les fréquences f pour lesquelles le module est nul.

$|\mathcal{F}\{tri_1\}(f)| = \text{sinc}^2(\pi f)$ et $\arg(\mathcal{F}\{tri_1\}(f)) = 0$ (lorsqu'il existe).
Le module est nul lorsque $f \in \mathbb{N}^*$.

- (c) Tracer le module de $\mathcal{F}\{tri_1\}(f)$ en fonction de f .

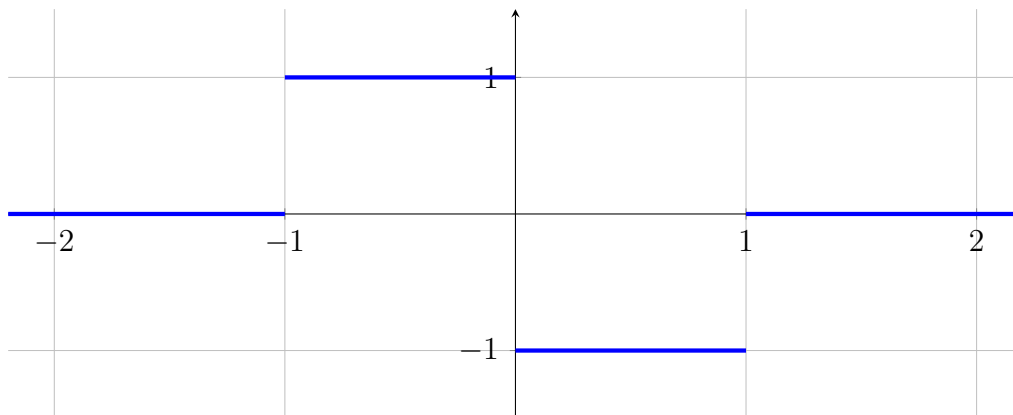


3. En admettant que $tri_1(t) = (\Pi * \Pi)(t)$, où $*$ représente l'opérateur de convolution, et en utilisant le résultat de la question 2.(a), déterminer $|\mathcal{F}\{\Pi\}(f)|$.

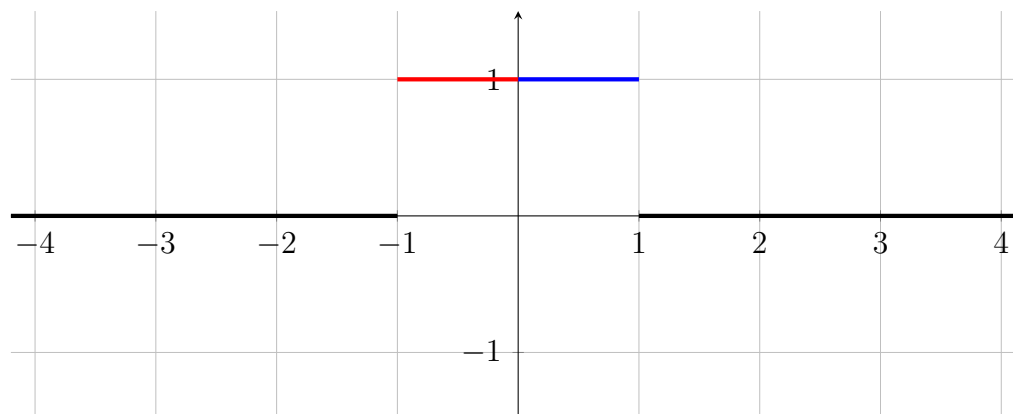
$\mathcal{F}\{tri_1\}(f) = \mathcal{F}\{\Pi\}(f) \cdot \mathcal{F}\{\Pi\}(f) = \mathcal{F}\{\Pi\}^2(f) = \text{sinc}^2(\pi f)$. Il en résulte que

$$|\mathcal{F}\{\Pi\}(f)| = |\text{sinc}(\pi f)|$$

4. (a) Représenter la dérivée de la fonction $tri_1(t)$.



- (b) Représenter les deux fonctions $f : t \mapsto \Pi(t - \frac{1}{2})$ et $g : t \mapsto \Pi(t + \frac{1}{2})$.



- (c) Exprimer la dérivée de la fonction $tri_1(t)$ en fonction de $f(t) = \Pi(t - \frac{1}{2})$ et $g(t) = \Pi(t + \frac{1}{2})$.

Lorsqu'elle existe, la dérivée de tri_1 est donnée par

$$tri_1'(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- (d) En utilisant la transformée de Fourier de Π , déterminer la transformée de Fourier de la fonction $tri'_1(t)$.

$$\mathcal{F}\{tri'_1\}(f) = e^{j\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) - e^{-j\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- (e) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $tri_1(t)$.

$$\mathcal{F}\{tri'_1\}(f) = 2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}\{tri'_1\}(f) = (j\omega)\mathcal{F}\{tri_1\}(f) \text{ donc } \mathcal{F}\{tri_1\}(f) = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}\{tri'_1\}(f).$$

$$\mathcal{F}\{tri_1\}(f) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Exercice 2 : 4 points

1. Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

3. (a) En utilisant la dérivation, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a, en dérivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

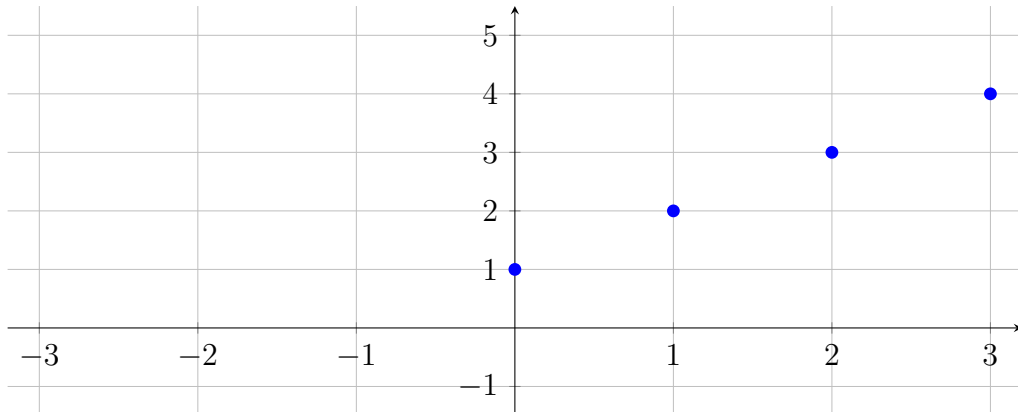
- (b) Déterminer, d'après ce qui précède, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}.$$

Exercice 3 : 3 points

Soit la fonction échantillonnée à $T_e = 1$ définie par $f(nT_e) = nT_e + 1$.

1. Représenter la séquence $(f(nT_e)u(nT_e))$ où u représente l'échelon unité (Heaviside).



2. Calculer la transformée en \mathcal{Z} de $f(nT_e)u(nT_e)$.

$f(nT_e)u(nT_e) = f(n)u(n) = (n + 1)u(n) = nu(n) + u(n)$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, on a

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

3. Calculer la transformée en \mathcal{Z} de $g(nT_e)$ où

$$g(nT_e) = f(nT_e)u(nT_e - 1)$$

$g(nT_e) = f(nT_e)u(nT_e - 1) = f(n)u(n-1) = (n+1)u(n-1) = (n-1)u(n-1) + 2u(n-1)$

$$G(z) = z^{-1} \frac{z}{(z-1)^2} + 2z^{-1} \frac{z}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^2}$$

Exercice 4 : 2 points

On considère le signal s défini par

$$s(t) = 3 \cos(2t) + 1$$

Proposer un code Matlab permettant d'obtenir

- la courbe de s , avec un quadrillage, en utilisant 1000 points, sur $[0; 3T]$ où T est la période de s ;
- la valeur moyenne de s ;
- la valeur efficace de s .

On pourra utiliser :

```
1 % Définir la fonction f(x) = x^2
2 f = @(x) x.^2;
3 % Générer un vecteur de n points équidistants entre a et b
4 a = 0; % Début de l'intervalle
5 b = 10; % Fin de l'intervalle
6 n = 100; % Nombre de points
7 x = linspace(a, b, n);
```

```
1 omega = 2;
2 T = 2 * pi / omega;
3 T
4 % Définir la fonction s(t)
5 s = @(t) 3*cos(omega*t)+1 ;
6 % Générer les points pour l'intervalle [0, 3T]
7 t = linspace(0, 3*T, 1000); % 1000 points uniformément répartis
8 % Tracer la courbe
9 figure;
10 plot(t, s(t), 'b-', 'LineWidth', 1.5);
11 grid on;
12 xlabel('Temps (s)');
13 ylabel('Amplitude');
14 title('Courbe de s(t) sur [0, 3T]');
15 xlim([0, 3*T]);
16 % Calculer la valeur moyenne de s
17 moy = mean(s(t));
18 % Calculer la valeur efficace de s
19 eff = sqrt(mean(s(t).^2));
20 % Afficher les résultats
21 disp(['Valeur moyenne de s : ', num2str(s_mean)]);
22 disp(['Valeur efficace de s : ', num2str(s_rms)]);
```