Génie électrique et informatique industrielle / iut de BORDEAUX

Semestre 1

CORRECTION DU TEST 1 OML - Novembre 2023

Exercice 1 : 6 points

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$A = \sqrt{3} + j \quad \text{et} \quad B = 1 - j$$

$|A| = 2$ et $\arg(A) = \dfrac{\pi}{6}$
$|B| = \sqrt{2}$ et $\arg(B) = -\dfrac{\pi}{4}$

2. En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$C = \frac{\sqrt{3} + j}{1 - j} \quad \text{et} \quad D = (\sqrt{3} + j)^{12}$$

$|C| = \dfrac{|A|}{|B|} = \sqrt{2}$ et $\arg(C) = \dfrac{5\pi}{12}$
$|D| = 2^{12}$ et $\arg(D) = 0$

Exercice 2 : 2 points

Soit a un réel quelconque. On considère l'expression

$$E_a = \cos a - \sin a$$

Parmi les trois relations ci-dessous, déterminer les deux égalités fausses en justifiant la réponse.

$$E_a = \cos(2a) \quad ❶ \;; \qquad E_a = \sqrt{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{4} - a\right) \quad ❷\;; \qquad E_a = \sin(2a) \quad ❸$$

Sont erronées ❶ et ❸.

Exercice 3 : 5 points

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ; \qquad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ; \qquad 2\cos(4x) = \sqrt{2}$$

$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

$2\cos(4x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{16}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv \dfrac{-\pi}{16}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Simplifier

$$E = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + 3\pi)$$

$E = \cos(x) - \cos(x) = 0$

3. Résoudre, après avoir précisé le domaine de définition, l'équation

$$\ln(2x^3) - \ln(x) = \ln 8$$

Cette équation a un sens sur $]0; +\infty[$.

$$\ln(2x^3) - \ln(x) = \ln 8 \Leftrightarrow \ln\left(2x^2\right) = \ln 8$$

L'unique solution de cette équation est donc $x = 2$.

Exercice 4 : 3 points

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2\sin(4x)$$

1. Déterminer la période T de f.

$T = \dfrac{\pi}{2}$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   Combien y a-t-il de solutions appartenant à $]0; \pi]$?

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

Les solutions de cette équation appartenant à $]0; \pi]$ sont donc au nombre de 4 .

3. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-T, T]$.

Exercice 5 : 4 points

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
   (a) $x^3 + x^2 = 0$

   $$x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0$$

   Les solutions de cette équation sont donc 0 et -1.

   (b) $x^2 + x + 1 = 0$

   $\Delta = -3$ donc $\delta = \sqrt{3}j$

   Les solutions de cette équation appartenant sont donc $\dfrac{-1-\sqrt{3}j}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{3}j}{2}$.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a
$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$