Exercice 1 : 3 points

Déterminer les transformées de Laplace des signaux a et b définis par

$$1. a(t) = u(t) - u(t - 3)$$

$$\mathcal{L}\{a\}(p) = (1 - e^{-3p}) \frac{1}{p}.$$

1 point

$$2. b(t) = t[u(t) - u(t - 3)] = tu(t) - (t - 3)u(t - 3) - 3u(t - 3)$$

$$\mathcal{L}\{b\}(p) = (1 - e^{-3p}) \frac{1}{p^2} - 3e^{-3p} \frac{1}{p}.$$

1 point par ligne = 2 points

Exercice 2 : 2 points

Lorsqu'un corps de masse m chute dans l'air, sa vitesse v répond à l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad m \frac{dv}{dt} + \rho v = mg$$

$$(E_H) \quad m \frac{dv}{dt} + \rho v = 0 \text{ a pour solution } t \mapsto K e^{\frac{-\rho}{m}t}$$

$$\text{Une solution particulière est } t \mapsto \frac{mg}{\rho}.$$

$$\text{Les solutions de (E) sont donc les fonctions } t \mapsto K e^{\frac{-\rho}{m}t} + \frac{mg}{\rho}.$$

1 + 0,5 + 0,5 = 2 points

Exercice 3 : 3 points

$$1. \text{ En utilisant une formule d'Euler, montrer que : } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2j\theta} + e^{-2j\theta} + 2) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

1 point

$$2. \text{ Déterminer la transformée de Laplace de } f \text{ définie par } f(t) = \cos^2(\omega t)u(t).$$

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{u(t) + \cos(2\omega t)u(t)\}(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right) = \frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$$

1 point

$$3. \text{ En déduire la transformée de Laplace de } g \text{ définie par } g(t) = \sin^2(\omega t)u(t).$$

$$g(t) = u(t) - f(t) \text{ donc } \mathcal{L}\{g\}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right) = \frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$$

1 point

Exercice 4 : 5 points

On souhaite résoudre le système différentiel (S) suivant :

$$-x(t) + y(t) + e^{-t}u(t) = x'(t) \quad \text{et} \quad x(t) - y(t) + e^{-t}u(t) = y'(t)$$

avec $x(0) = y(0) = 1$.

1. $-\mathcal{L}\{x\}(p) + \mathcal{L}\{y\}(p) + \frac{1}{p+1} = p\mathcal{L}\{x\}(p) - 1$ donc $(p+1)\mathcal{L}\{x\}(p) - \mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p+1} \cdot \mathcal{L}\{x\}(p) - \mathcal{L}\{y\}(p) + \frac{1}{p+1} = p\mathcal{L}\{y\}(p) - 1$ donc $-\mathcal{L}\{x\}(p) + (p+1)\mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p+1}$.

1 + 0,5 = 1,5 point

2. D'après les relations précédentes, on a $(p+1)\mathcal{L}\{x\}(p) - \mathcal{L}\{y\}(p) = -\mathcal{L}\{x\}(p) + (p+1)\mathcal{L}\{y\}(p)$ d'où

$$\mathcal{L}\{x\}(p) = \mathcal{L}\{y\}(p)$$

On a alors $p\mathcal{L}\{x\}(p) = \frac{p+2}{p(p+1)}$ ce qui conduit à

$$\mathcal{L}\{x\}(p) = \mathcal{L}\{y\}(p) = \frac{p+2}{p(p+1)}$$

1 + 0,5 = 1,5 point

3. $\frac{p+2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1}$ donc

$$x(t) = y(t) = (2 - e^{-t}) u(t)$$

1 point pour DES + 1 point pour résultat = 2 points

Exercice 5 : 4 points

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x'' + x = u(t) \quad \text{avec} \quad x(0) = 1 \quad \text{et} \quad x'(0) = 0$$

Avec la transformée de Laplace :

$$(p^2 + 1)\mathcal{L}\{x\}(p) - p = \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}\{x\}(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$
$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{x\}(p) = \frac{1}{p}$$

on obtient donc, pour tout t positif,

$$x(t) = 1$$

1 point par ligne = 4 points

Sans utiliser la transformée de Laplace :

$(E_H) : x'' + x = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont j et $-j$.

1 point

(E_H) a donc pour solutions les fonctions $t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$.

1 point

Une solution particulière de (E) est $t \mapsto 1$.

1 point

Les solutions de $x'' + x = 1$ sont donc de la forme $t \mapsto 1 + A \cos(t) + B \sin(t)$.

1 point

$x(0) = 1$ donc $A + 1 = 0$ soit $A = 0$ et $x'(0) = 0$ donc $B = 0$.

On obtient donc, pour tout réel t , $x(t) = 1$.

Exercice 6 : 3 points

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

1 point

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{4^{n+1}}$.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e}{4}\right)^n = \frac{1}{4 - e}$$

1 point

3. Calculer $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = 1$.

1 point