CORRECTION DU TEST DE MATHEMATIQUES - S2 - Mars 2024

Exercice 1 : 4 points

On rappelle qu'un signal du type $s : t \mapsto V_m \sin(\omega t + \varphi)$ a pour valeur efficace $\dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$.

On considère le signal f défini par

$$f(t) = 2\sin(4t) + 2\sqrt{3}\cos(4t)$$

1. Déterminer la période de f.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

2. Déterminer, sans calcul, en justifiant la réponse, la valeur moyenne de f.
   La somme de deux signaux de moyenne nulle est de moyenne nulle.
3. (a) Écrire $f(t)$ sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.
   $A = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ et $\varphi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$$f(t) = 4\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

   (b) Déterminer la valeur efficace de f.
   La valeur efficace du signal est donc

$$f_{eff} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Exercice 2 : 3 points

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P défini par

$$P(X) = 3X^3 - 24$$

$P(2) = 0$ donc $P(X)$ est divisible par $(X - 2)$.
$P(X) = (X - 2)(3X^2 + 6X + 12)$
$P(X) = 3(X - 2)(X^2 + 2X + 4) = 3(X - 2)(X + 1 + j\sqrt{3})(X + 1 - j\sqrt{3})$

Exercice 3 : 8 points

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2+x}$.

   $\dfrac{x^3+2}{x^2+x} = x - 1 + \dfrac{x+2}{x(x+1)} = x - 1 + \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

   $\dfrac{x^3+2}{x^2+x} = x - 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

   Ainsi
   $$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x| - \ln|x+1|$$

2. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une primitive de
   $$g : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$$

   $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$

   Ainsi
   $$\int g(x)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Exercice 4 : 5 points

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $A = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

   $A = \left[\dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$

2. (a) Calculer $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   $\displaystyle\int_1^M \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1 - \dfrac{1}{M} \underset{+\infty}{\to} 1$ donc $B = 1$.

   (b) Wolframalpha, pour le calcul de $C = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, renvoie
   " integral does not converge "
   Expliquer ce résultat.

   $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln(\varepsilon) \underset{0}{\to} +\infty$ donc C diverge.