CORRECTION DU TEST DE OML

Exercice 1 : 5 points

On considère la suite $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $T_e = 1$ telle que

$$y(n+2) = 5y(n+1) - 6y(n)$$

avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

1. $y(2) = 5$, $y(3) = 19$ et $y(4) = 65$.
2. En utilisant la transformée en $\mathcal{Z}$, déterminer $y(n)$ en fonction de n.
   $\mathcal{Z}(y(n+2))(z) = 5\mathcal{Z}\left(y(n+1)\right)(z) - 6\mathcal{Z}\left(y(n)\right)(z)$
   $z^2\mathcal{Z}\left\{y(n)\right)(z) - z = 5z\mathcal{Z}\left(y(n)\right)(z) - 6\mathcal{Z}\left(y(n)\right)(z)$.
   $\mathcal{Z}\left\{y(n)\right)(z) = \dfrac{z}{z^2-5z+6}$
   $\mathcal{Z}\left\{y(n)\right)(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z-2)}$
   $\mathcal{Z}\left\{y(n)\right)(z) = \dfrac{3}{z-3} - \dfrac{2}{z-2} = z^{-1}\left(\dfrac{3z}{z-3} - \dfrac{2z}{z-2}\right)$
   $$y(n) = \left[3^n - 2^n\right]u(n-1) = 3^n - 2^n$$
3. $y(n) = 3^n\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$ donc $y(n) \underset{+\infty}{\to} +\infty$.

Exercice 2 : 6 points

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
   $$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 15 \\ -20 & 24 \end{pmatrix} = 5A - 6I_2$$
2. En utilisant la relation précédente, déterminer deux réels α' et β' tels que $A^3 = \alpha' A + \beta' I_2$.
   $A^3 = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6I_2) - 6A = 19A - 30I_2$
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on souhaite déterminer l'expression de la matrice A^n.
   (a) Montrer que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   $PDP^{-1} = A$.
   (b) En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.
   $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} & 3^{n+1} - 3\times 2^n \\ 2^{n+2} - 4\times 3^n & 4\times 3^n - 3\times 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 3 : 2 points

On considère le système

$$(S_a)\left\{\begin{array}{ll} ax+4y & =1 \\ x+ay & =2 \end{array}\right.$$

1. À quelle condition sur a le système (S_a) admet-il un unique couple-solution ?

   Le système (S_a) admet une unique solution si $a^2-4\neq 0$ soit $a\notin\{-2;2\}$.
2. Quelle est alors le couple-solution de ce système ?
   On a alors $x=\dfrac{a-8}{a^2-4}$ et $y=\dfrac{2a-1}{a^2-4}$.