Semestre 1

CORRECTION DU TEST 2 OML - janvier 2024

Exercice 1 : 6 points

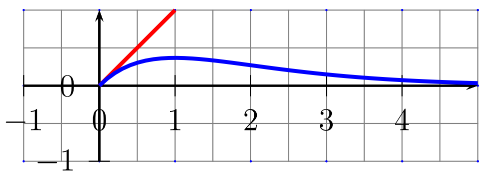
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x \times \mathrm{e}^{-x}$$

1. Étudier les variations de f et établir son tableau de variations.
   $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
   exp est strictement positive donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Déterminer, par calcul, une équation de la droite (Δ), tangente à courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = x$.
3. Représenter Δ et la courbe représentative de f.



4. Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$g'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [-g(x)]_0^1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$$

Exercice 2 : 3 points

Soit R, C et ω des réels strictement positifs. On considère

$$H(\omega) = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ avec } RC = 1$$

1. Déterminer le module de $H(\omega)$ en fonction de R et ω.
   $H(\omega) = \dfrac{1 + jRC\omega}{jC\omega} = \dfrac{1 + j\omega}{jC\omega} = R\,\dfrac{1 + j\omega}{j\omega}$

$$|H(\omega)| = R\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}$$

2. On note $\varphi(\omega)$ un argument de $H(\omega)$. Montrer que

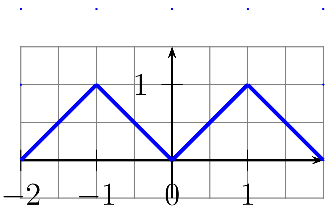
$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

   $\varphi(\omega) = \arg(R) + \arg(1 + j\omega) - \arg(j\omega)$ donc $\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \dfrac{\pi}{2}$

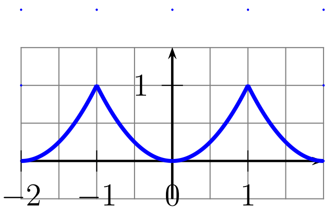
<u>Exercice 3 :</u> 4 points

On considère la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ tel que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $s(x) = x$, s est paire et 2-périodique.

1. Représenter s sur $[-2; 2]$.



2. Déterminer la valeur moyenne de s.
   $< s >= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} s(t)\ \ \mathrm{d}t = \int_0^1 t\ \ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$.
3. Représenter s^2 sur $[-2; 2]$.



4. Déterminer la valeur efficace de s.
   $< s^2 >= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} s(t)\ \ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\ \ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}$. On a donc

$$s_{eff} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 4 : 5 points

1. Calculer
$$I = \int_0^2 \left(x^3 - 2\right)\, \mathrm{d}x$$
$I = \left[\dfrac{x^4}{4} - 2x\right]_0^2 = 0.$
2. Calculer
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos(3x)\, \mathrm{d}x$$
$J = 2\left[\dfrac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 0.$
3. Calculer
$$K = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x+1}{x^2}\, \mathrm{d}x$$
$K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x+1}{x^2}\, \mathrm{d}x = K = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) = \frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}.$

Exercice 5 : 2 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 + 4$. Justifier que f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, dont on déterminera le domaine de définition et l'expression.

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc f admet une fonction réciproque.
• Le domaine de définition de f^{-1} est $f\left(\mathbb{R}^+\right) = [4; +\infty[$.
• $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = y - 4$. On a donc

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$$