CORRECTION TEST 2 DE MATHÉMATIQUES Janvier 2017

# Exercice 1 : 6 points

1. La série entière $\sum a_n z^n$ converge pour $z = 3 - 4j$ de module 5 et diverge pour $z = -5j$ de module 5 donc RCV=5.

   1 point

2. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1}{n+2}\right| = 0$ donc RCV=$+\infty$.

   1 point

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-2}$ donc RCV=$\mathrm{e}^2$.

   1 point

3. (a) $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ donc RCV $= 1$.

   0,5 point

   (b) $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc, d'après le théorème sur la convergence des séries de Riemann $(\alpha = 0,5 < 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

   0,5 point

4. (a) Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n$ est $a$ car celui de $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ est 1.
   $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n = \dfrac{a}{a-z}$.

   0,5 + 0,5 = 1 point

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \sum\limits_{n\geq 0}\left(-1+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)x^n$

   0,5 + 0,5 = 1 point

# Exercice 2 : 3 points

1. $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_0(t - kT)$

   0,5 point

2. $f(nT_e) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_0(nT_e - 3kT_e)$ donc $\mathcal{Z}(f(nT_e)) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^{-3k}\mathcal{Z}(f_0(nT_e)) = \dfrac{z^3}{z^3-1}\mathcal{Z}(f_0(nT_e))$

   1 point

3. (a) Représentation du signal $f$ sur l'intervalle $[0; 2T]$ et des échantillons $f(nT_e)$ associés.

   0,5 point

   (b) $\mathcal{Z}(f_0(nT_e)) = \sum\limits_{k=0}^{2} f_0(kT_e)z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2}$ d'où la transformée en $\mathcal{Z}$ de $f$.

   1 point

# Exercice 3 : 7 points

1. (a) La courbe de $x$ admet 4 points anguleux donc $x$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\tau-\alpha; -\tau; \tau+\alpha; \tau\}$.

   0,5 point

   (b) $x'(t) = \dfrac{B}{\alpha}$ si $t \in ]-\tau-\alpha; -\tau[$, $x'(t) = \dfrac{-B}{\alpha}$ si $t \in ]\tau; \tau+\alpha[$ et $x'(t) = 0$ sinon.

   0,5 point

   (c) La représentation graphique de la dérivée de $x'$ est donnée en figure 1.

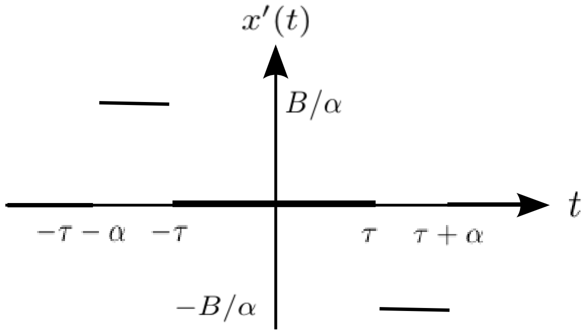


FIGURE 1 – Représentation de la fonction $x'$

0,5 point

2. (a) $\mathcal{F}\{P\}(\omega) = A\theta \text{sinc}\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)$.

   1,5 point

   (b) Le module est donné par $|\mathcal{F}\{P\}(\omega)| = A\theta|\text{sinc}\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)|$. Ce dernier s'annule pour $\omega = \frac{2k\pi}{\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$. La représentation du module de la transformée de Fourier de $P$, en fonction de $\omega$ est donnée en figure 2, pour $A = 1$ et $\theta = 1$.

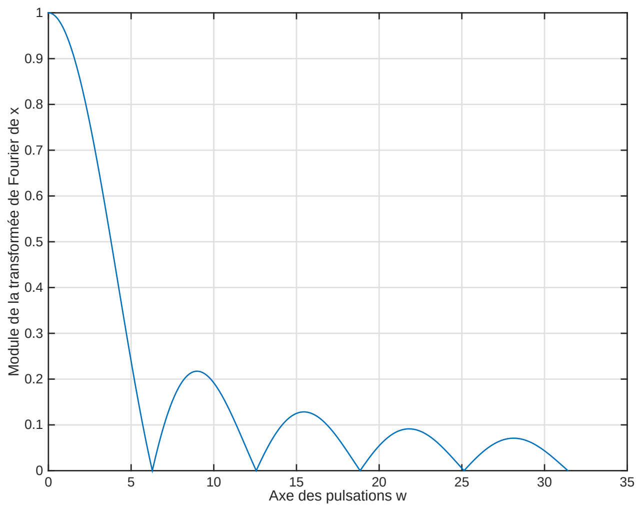


FIGURE 2 – Module de la transformée de Fourier de $P$ pour $A = 1$ et $\theta = 1$

1 point

3. (a) $x'$ est impaire donc on peut utiliser que $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}(\omega) = -2j\int_{\tau}^{\alpha+\tau} x'(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$ soit $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}(\omega) = \frac{2B}{\alpha}j\int_{\tau}^{\alpha+\tau}\sin(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{-2B}{\alpha\omega}j\left(\cos(\omega(\alpha+\tau)) - \cos(\omega\tau)\right)$.

   Or, $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ donc

   $\cos(\omega(\alpha+\tau)) - \cos(\omega\tau) = -2\sin\left(\frac{\omega(\alpha+2\tau)}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)$. Ainsi :

   $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}(\omega) = \frac{4B}{\alpha\omega}j\sin\left(\frac{\omega(\alpha+2\tau)}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)$ soit

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}(\omega) = 2j\,B\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)\sin\left(\omega\left[\tau+\frac{\alpha}{2}\right]\right)$$

2 points

   (b) $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\}(\omega) = (j\omega)\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$ donc

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \frac{2\,B}{\omega}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)\sin\left(\omega\left[\tau+\frac{\alpha}{2}\right]\right)$$

0,5 point

4. $|\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)| = \frac{2\,B}{\omega}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\alpha}{2}\right)\sin\left(\omega\left[\tau+\frac{\alpha}{2}\right]\right)\right|$

0,5 point

## Exercice 4 : 4 points

1. (a) Cas où $x < 0$, il n'y a pas de recouvrement entre $f$ et $g$ donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = 0$$

0,5 point

   (b) Cas où $0 \leq x \leq 1$, il y a recouvrement entre $f$ et $g$ sur $[0,\ x]$ donc

$$\int_{0}^{x} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x}(x-t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$$

0,5 point

   (c) $x > 1$, il y a un recouvrement entre $f$ et $g$ sur $[x-1,\ x]$ donc

$$\int_{x-1}^{x} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x}(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

0,5 point

2. Le produit de convolution est donné en figure 3.

0,5 point

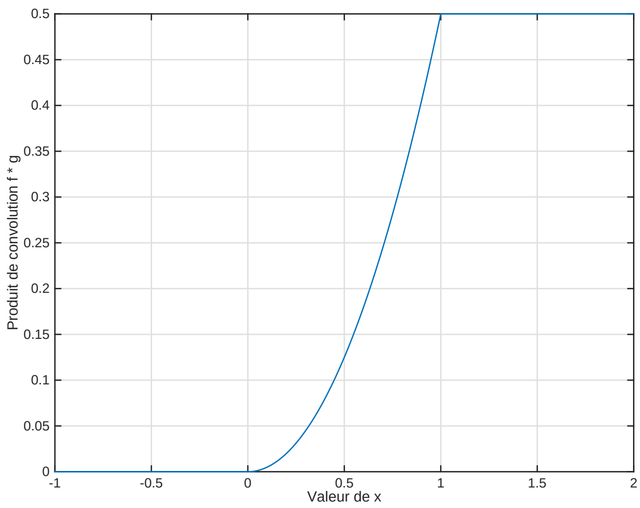


FIGURE 3 – Produit de convolution $f * g$ en fonction de $x$

3. (a) Cas 1 : Approche basée sur le produit de convolution

La transformée de Fourier de $f * g$ est donnée par

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-j\omega x} \mathrm{d}x$$

En décomposant les bornes de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f * g\}(\omega) &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^{-j\omega x} \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-j\omega x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} I(x) + \frac{e^{-j\omega}}{-2j\omega} \end{aligned}$$

où $I(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-j\omega x} \mathrm{d}x$.

0,5 point

On procède à une première intégration par parties sur $I(x)$ en posant

$$\begin{aligned} u(x) = x^2 &\Rightarrow u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^{-j\omega x} &\Rightarrow v(x) = \frac{e^{-j\omega x}}{-j\omega} \end{aligned}$$

et on obtient

$$I(x) = -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{2}{j\omega} J(x)$$

où $J(x) = \displaystyle\int_0^1 x e^{-j\omega x} \mathrm{d}x$.

0,5 point

On procède à une deuxième intégration par parties sur $I(x)$ en posant

$$\begin{aligned} u(x) = x &\Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-j\omega x} &\Rightarrow v(x) = -\frac{e^{-j\omega x}}{j\omega} \end{aligned}$$

et on obtient

$$J(x) = -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{-j\omega} - 1\right)$$

0,5 point

Finalement, on a

$$\mathcal{F}\left\{f * g\right\}(\omega) = -\frac{e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} - \frac{e^{-j\omega}}{(j\omega)^3} + \frac{1}{(j\omega)^3}$$

0,5 point

soit 2 points pour la question

(b) Cas 2 : Approche basée sur la propriété du produit des transformées de Fourier
On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f * g\right\}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{f\right\}(\omega)\mathcal{F}.\left\{g\right\}(\omega) \\ &= \int_0^1 te^{-j\omega t}\mathrm{d}t.\int_0^\infty e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= I(t).\frac{1}{j\omega}\end{aligned} \tag{1}$$

où $I(t) = \displaystyle\int_0^1 te^{-j\omega t}\mathrm{d}t$.

0,5 point

On procède à une intégration par partie sur $I(t)$ en posant

$$\begin{aligned}&u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ &v'(t) = e^{-j\omega t} \Rightarrow v(t) = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\end{aligned}$$

et on obtient

$$I(t) = -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2}\left(1 - e^{-j\omega}\right)$$

0,5 point

Finalement, on a

$$\mathcal{F}\left\{f * g\right\}(\omega) = -\frac{e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} - \frac{e^{-j\omega}}{(j\omega)^3} + \frac{1}{(j\omega)^3}$$

1 point

soit 2 points pour la question