

Exercice 1 : 6 points

1. (a) En utilisant les formules d'Euler, linéariser
- $\sin^2 \theta$
- .

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \right)^2 = \frac{e^{2j\theta} - 2 + e^{-2j\theta}}{-4} = \frac{2 \cos(2\theta) - 2}{-4} \text{ donc}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

- (b) On considère le signal
- f
- défini par

$$f(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- i. Déterminer, par calcul, la valeur moyenne de
- f
- .

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{V_m}{T} \left[\frac{-\cos(\omega t + \varphi)}{\omega} \right]_0^T = \frac{V_m}{\omega T} [\cos(2\pi + \varphi) - \cos(\varphi)] = 0$$

- ii. Déterminer, par calcul, la valeur efficace de
- f
- .

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{V_m^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t + 2\varphi) dt = \frac{V_m^2}{2}$$

Il en résulte que

$$f_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

2. On considère le signal
- s
- défini par

$$s(t) = 2 \sin(4t) + 2 \cos(4t)$$

- (a) Déterminer la période de
- s
- .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

- (b) Déterminer, sans calcul, en justifiant la réponse, la valeur moyenne de
- s
- .

La valeur moyenne de s est nulle en tant que somme de signaux de moyenne nulle.

- (c) i. Écrire
- $s(t) = 2 \sin(4t) + 2 \cos(4t)$
- sous la forme
- $A \sin(\omega t + \varphi)$
- .

$$A = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ et } \varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$s(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$$

ii. Déterminer la valeur efficace de s .

$$s_{eff} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

iii. En utilisant 2(c)i. , déterminer φ' tel que

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \text{ soit } \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \text{ Il en résulte que}$$

$$s(t) = 2\sqrt{2} \cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 2 : 3 points

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P défini par

$$P(X) = 2X^3 - 2$$

$P(1) = 0$ donc $P(X)$ est divisible par $X - 1$. On a alors

$$P(X) = 2(X - 1)(X^2 + X + 1)$$

$X^2 + X + 1$ admet pour discriminant $\Delta = -3 < 0$. Ses racines sont $\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$.

Il en résulte que, dans $\mathbb{C}[X]$, on a

$$P(X) = 2(X - 1) \left(X + \frac{1 + j\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice 3 : 8 points

1. On considère f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$$

(a) Décomposer en éléments simples $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x+1}{x^2-x} \\ f(x) &= 1 + \frac{x+1}{x(x-1)} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} \\ a &= \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = -1 \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) f(x) = 2 \text{ donc} \\ f(x) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

(b) En déduire une primitive F de la fonction f .

$$F(x) = x - \ln x + 2 \ln(x-1)$$

2. On considère g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$$

(a) Décomposer en éléments simples $g(x)$.

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

(b) En déduire que $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx &= \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Exercice 4 : 3 points

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$J = \int_1^e x \ln x \, dx$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \text{ donc}$$

$$J = \frac{1 + e^2}{4}$$

2. Wolframalpha, pour le calcul de $K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$, renvoie

" integral does not converge "

Expliquer ce résultat.

$$\int_1^M \frac{1}{x} \, dx = \ln(M) \xrightarrow{+\infty} +\infty \text{ donc } K \text{ diverge.}$$