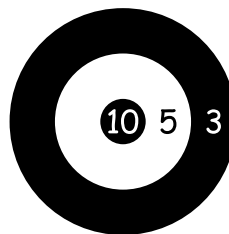


Correction de l'évaluation de Probabilités-Statistiques (OML)

Exercice 1 : 7 points

On considère des cercles concentriques de rayon 1 et 3 mètres sur une cible ayant pour rayon 5 mètres. A l'issue d'un tir, un joueur obtient le nombre de points indiqués selon la zone atteinte et 0 si la cible n'est pas atteinte.

On considère que 90% des tirs atteignent la cible.



On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par un joueur à l'issue d'un seul tir.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.

On note A l'évènement : "la cible est atteinte". $\mathbb{P}(A) = 0,9$ donc $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 0,1$.

- (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = 10) = 0,9 \times \frac{1}{25}$.

$$\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}([X = 10] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 5^2} = 0,9 \times \frac{1}{25}.$$

2. Déterminer la loi de X .

$$\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}([X = 5] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 5^2} = 0,9 \times \frac{8}{25}.$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}([X = 3] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2}{\pi \cdot 5^2} = 0,9 \times \frac{16}{25}.$$

3. Déterminer l'espérance de X .

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k) = 3,528.$$

4. Quelle est la probabilité qu'un joueur effectuant trois tirs obtienne 0 point ?

La probabilité qu'un joueur effectuant trois tirs obtienne 0 point est $0,1^3 = \frac{1}{1000}$.

5. Un joueur effectue 100 tirs.

En utilisant ce qui suit, déterminer la probabilité qu'il n'atteigne pas la cible entre 5 et 20 fois.

> $n = 100$

> $p = 0.1$

> $p = \text{pbinom}(q = 20, \text{size} = n, \text{prob} = p) - \text{pbinom}(q = 4, \text{size} = n, \text{prob} = p)$

> $\text{round}(p, 3)$

Exercice 2 : 4 points

La durée de vie Y , exprimée en années, d'un transistor de puissance MOSFET est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

On rappelle que la fonction de densité de la loi Exponentielle de paramètre λ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

En outre, on rappelle que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$.

On considère que la durée de vie moyenne de ces transistors est de 20 ans.

1. Déterminer la valeur de λ .

La durée de vie moyenne est égale à 20 donc $\frac{1}{\lambda} = 20$ soit $\lambda = \frac{1}{20}$.

2. Calculer la probabilité que ce transistor ait une durée de vie supérieure à 20 ans.

$$\mathbb{P}(X > 20) = e^{-20\lambda} = e^{-1}.$$

3. Calculer la probabilité que ce transistor ait une durée de vie supérieure à 20 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 10 ans.

$$\mathbb{P}_{(X>10)}(X > 20) = \mathbb{P}(X > 10) = e^{-0,5}.$$

4. On met deux transistors MOSFET en parallèle.

On note X_1 et X_2 les durées de vie de ces deux transistors. Ces deux variables sont donc indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ .

On note X la durée de fonctionnement de ce système (tant que l'un des deux, au moins, fonctionne).

Déterminer $\mathbb{P}(X \leq t)$ pour tout réel t positif.

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) \times \mathbb{P}(X_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$$

Exercice 3 : 9 points

Une entreprise fabrique des tubes en série dont le diamètre X , exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

1. On suppose, dans cette question, que le diamètre X des tubes produits par une machine, exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 1.

- (a) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre compris entre 198 mm et 202 mm.

$$\mathbb{P}(198 \leq X \leq 202) = \mathbb{P}(-2 \leq X^* \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0,9544.$$

- (b) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre supérieur à 201 mm.

$$\mathbb{P}(X > 201) = \mathbb{P}(X^* > 1) = 1 - \Phi(1) \simeq 0,1587.$$

- (c) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre inférieur à 197 mm.

$$\mathbb{P}(X < 197) = \mathbb{P}(X^* < -3) = 1 - \Phi(3) \simeq 0,0013.$$

2. Dans cette question, on suppose que la variable X est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(200; \sigma)$. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'un tube, pris au hasard, ait un diamètre compris entre 198,5 mm et 201,5 mm soit égale à 0,9974.

$$\mathbb{P}(198,5 \leq X \leq 201,5) = 0,9974 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-1,5}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,9974. \text{ On a donc}$$

$$2\Phi\left(\frac{1,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,9974 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,9987$$

$$\frac{1,5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,9987) \text{ soit } \frac{1,5}{\sigma} = 3 \text{ d'où } \sigma = 0,5.$$

3. L'entreprise souhaite tester une autre machine fabriquant des tubes en série dont le diamètre X , exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu. Pour y parvenir, l'entreprise a prélevé un échantillon de $n = 16$ tubes dont le diamètre a été mesuré (en mm).

En utilisant certaines des informations fournies en page 3, répondre aux questions suivantes :

- (a) Déterminer une estimation du diamètre moyen, en mm, des tubes fabriqués par cette machine. Une estimation du diamètre moyen est égale à 199.81 mm.

- (b) Déterminer une estimation de la variance des diamètres des tubes fabriqués par cette machine.

$$\text{Une estimation de la variance des diamètres des tubes est égale à } 0,5905.$$

- (c) Le diamètre moyen observé est-il significativement inférieur à 200 mm ?

$$\text{La p-valeur du test de Student (cf. écart-type } \sigma \text{ inconnu) est environ égale à } 0,17 \text{ donc supérieure à } 5\%. \text{ On ne rejette donc pas } \mathcal{H}_0 : \mu = 200.$$

$$\text{Le diamètre moyen observé n'est donc pas significativement inférieur à } 200 \text{ mm.}$$