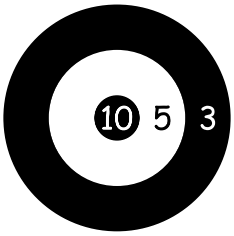
Semestre 5 — BUT GEII

Janvier 2024

Correction de l'évaluation de Probabilités-Statistiques (OML)

Exercice 1 : 7 points

On considère des cercles concentriques de rayon 1 et 3 mètres sur une cible ayant pour rayon 5 mètres. A l'issue d'un tir, un joueur obtient le nombre de points indiqués selon la zone atteinte et 0 si la cible n'est pas atteinte.
On considère que 90% des tirs atteignent la cible.



On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par un joueur à l'issue d'un seul tir.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X=0)$.

   On note A l'évènement : "la cible est atteinte". $\mathbb{P}(A) = 0,9$ donc $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 0,1$.

   1 point

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X=10) = 0,9 \times \dfrac{1}{25}$.

   $$\mathbb{P}(X=10) = \mathbb{P}([X=10] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi.1^2}{\pi.5^2} = 0,9 \times \frac{1}{25}.$$

   1 point

2. Déterminer la loi de X.

   $$\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}([X=5] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi.3^2 - \pi.1^2}{\pi.5^2} = 0,9 \times \frac{8}{25}.$$

   $$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}([X=3] \cap A) = 0,9 \times \frac{\pi.5^2 - \pi.3^2}{\pi.5^2} = 0,9 \times \frac{16}{25}.$$

   1+1 = 2 points

3. Déterminer l'espérance de X.

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k) = 3,528.$$

   1 point

4. Quelle est la probabilité qu'un joueur effectuant trois tirs obtienne 0 point ?

   La probabilité qu'un joueur effectuant trois tirs obtienne 0 point est $0,1^3 = \dfrac{1}{1000}$.

1 point

5. Un joueur effectue 100 tirs.
En utilisant ce qui suit, déterminer la probabilité qu'il n'atteigne pas la cible entre 5 et 20 fois.

```
> n = 100
> p = 0.1
> p = pbinom(q = 20, size = n, prob = p) - pbinom(q = 4, size = n, prob = p)
> round(p, 3)
```

```
[1] 0.975
```

1 point

Exercice 2 : 4 points

La durée de vie Y, exprimée en années, d'un transistor de puissance MOSFET est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que la fonction de densité de la loi Exponentielle de paramètre λ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

En outre, on rappelle que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$.
On considère que la durée de vie moyenne de ces transistors est de 20 ans.

1. Déterminer la valeur de λ.
La durée de vie moyenne est égale à 20 donc $\dfrac{1}{\lambda} = 20$ soit $\lambda = \dfrac{1}{20}$.

1 point

2. Calculer la probabilité que ce transistor ait une durée de vie supérieure à 20 ans.
$\mathbb{P}(X > 20) = \mathrm{e}^{-20\lambda} = \mathrm{e}^{-1}$.

1 point

3. Calculer la probabilité que ce transistor ait une durée de vie supérieure à 20 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 10 ans.
$\mathbb{P}_{(X>10)}(X > 20) = \mathbb{P}(X > 10) = \mathrm{e}^{-0,5}$.

1 point

4. On met deux transistors MOSFET en parallèle.
On note X_1 et X_2 les durées de vie de ces deux transistors. Ces deux variables sont donc indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.
On note X la durée de fonctionnement de ce système (tant que l'un des deux, au moins, fonctionne).
Déterminer $\mathbb{P}(X \leq t)$ pour tout réel t positif.

$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\left((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t)\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) \times \mathbb{P}(X_2 \leq t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2$

1 point

Exercice 3 : 9 points

Une entreprise fabrique des tubes en série dont le diamètre X, exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

1. On suppose, dans cette question, que le diamètre X des tubes produits par une machine, exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 1.
   (a) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre compris entre 198 mm et 202 mm.
   $\mathbb{P}(198 \leq X \leq 202) = \mathbb{P}(-2 \leq X^* \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0,9544.$

   1 point

   (b) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre supérieur à 201 mm.
   $\mathbb{P}(X > 201) = \mathbb{P}(X^* > 1) = 1 - \Phi(1) \simeq 0,1587.$

   1 point

   (c) Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la fabrication ait un diamètre inférieur à 197 mm.
   $\mathbb{P}(X < 197) = \mathbb{P}(X^* < -3) = 1 - \Phi(3) \simeq 0,0013.$

   1 point

2. Dans cette question, on suppose que la variable X est distribuée suivant la loi normale $\mathcal{N}(200; \sigma)$. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'un tube, pris au hasard, ait un diamètre compris entre 198,5 mm et 201,5 mm soit égale à 0,9974.
   $\mathbb{P}(198,5 \leq X \leq 201,5) = 0,9974 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-1,5}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,9974$. On a donc
   $2\Phi\left(\frac{1,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,9974 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,9987$
   $\frac{1,5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,9987)$ soit $\frac{1,5}{\sigma} = 3$ d'où $\sigma = 0,5.$

   2 points

3. L'entreprise souhaite tester une autre machine fabriquant des tubes en série dont le diamètre X, exprimé en mm, est distribué selon la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu. Pour y parvenir, l'entreprise a prélevé un échantillon de $n = 16$ tubes dont le diamètre a été mesuré (en mm).
   En utilisant certaines des informations fournies en page 3, répondre aux questions suivantes :

   (a) Déterminer une estimation du diamètre moyen, en mm, des tubes fabriqués par cette machine. Une estimation du diamètre moyen est égale à 199.81 mm.

   1 point

   (b) Déterminer une estimation de la variance des diamètres des tubes fabriqués par cette machine.
   Une estimation de la variance des diamètres des tubes est égale à 0,5905.

   1 point

   (c) Le diamètre moyen observé est-il significativement inférieur à 200 mm ?
   La p-valeur du test de Student (cf. écart-type σ inconnu) est environ égale à 0,17
   donc supérieure à 5%. On ne rejette donc pas $\mathcal{H}_0 : \mu = 200$.
   Le diamètre moyen observé n'est donc pas significativement inférieur à 200 mm.

   2 points