Génie électrique et informatique industrielle / iut de BORDEAUX

université de BORDEAUX

Année universitaire 2024-2025

TRAITEMENT DU SIGNAL MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Outils Mathématiques et Logiciels

BUT - SEMESTRE 3

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

1 SERIES ENTIÈRES **1**
- I Généralités . . . 1
- II Domaine de convergence d'une série entière . . . 2
- III Séries géométriques et dérivées . . . 2

2 TRANSFORMÉE en $\mathcal{Z}$ **3**
- I Généralités . . . 3
- II Exemples de transformées . . . 4
  - II.1 Suite échelon-unité . . . 4
  - II.2 Suite de Dirac . . . 4
  - II.3 Suite Exponentielle . . . 4
- III Propriétés . . . 5
  - III.1 Linéarité . . . 5
  - III.2 Séquences décalées . . . 6
    - III.2.1 (i) Séquence retardée . . . 6
    - III.2.2 (ii) Séquence avancée . . . 6
  - III.3 Transformée de $\left\{a^{nT_e} f(nT_e)\right\}$ . . . 7
  - III.4 Transformée de $\{nT_e f(nT_e)\}$ . . . 7
  - III.5 Transformée d'un produit de convolution . . . 8
  - III.6 Théorème de la valeur initiale . . . 8
  - III.7 Théorème de la valeur finale . . . 8
- IV Transformation en Z inverse . . . 8
- V Applications de la transformée en Z . . . 9
  - V.1 Application en automatique et électronique : la transformée bilinéaire . . . 9
  - V.2 Équations aux différences du premier ordre (à coefficients constants) . . . 10
  - V.3 Équations aux différences du deuxième ordre . . . 11

Chapitre 1

SERIES ENTIÈRES

I Généralités

Définition 1 :
On appelle série entière de la variable z (réelle ou complexe) une série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n z^n$. On la note : $\sum a_n z^n$.
La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$ est appelée somme de cette série entière.

Remarque 1 :
Il arrive que, lorsque la variable est réelle, on la note x.

Remarque 2 :
La somme partielle de rang n, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, est un polynôme.
Une série entière peut être vue comme une généralisation de la notion d'approximation par un polynôme.

On rappelle que, pour tout z différent de 1, on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Propriété 1 : [Série géométrique]
Pour tout z tel que $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Cet exemple fait apparaître qu'une série entière, lorsqu'elle est convergente, a pour somme une fonction de la variable z.
Le problème se pose donc de déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles une série entière est convergente et d'étudier alors les propriétés de la fonction somme.

II Domaine de convergence d'une série entière

DÉFINITION 2 :
On appelle rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ le nombre R défini par :

$$R = \sup\{\rho \geq 0 \ / \ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}.$$

REMARQUE 3 : $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Théorème 1 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$,

- si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;
- Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).

REMARQUE 4 :

- Si la variable z est réelle, $]-R; R[$ constitue l'intervalle de convergence ;
- Si la variable z est complexe, $D = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < R\}$ est le disque de convergence ;
- Pour $|z| = R$, une étude particulière est nécessaire.

III Séries géométriques et dérivées

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour $|z| < R$, $\quad S_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ converge donc vers la fonction somme S définie par $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

On admettra que cette fonction somme S possède les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 2 : [Continuité]
La fonction somme S est continue sur l'intervalle de convergence $]-R; R[$.

PROPRIÉTÉ 3 : [Dérivation]
La fonction somme S est dérivable sur l'intervalle de convergence $]-R; R[$.
De plus, la série dérivée $S'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ admet R pour rayon de convergence.

PROPRIÉTÉ 4 : [Série géométrique dérivée]
Pour tout z tel que $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

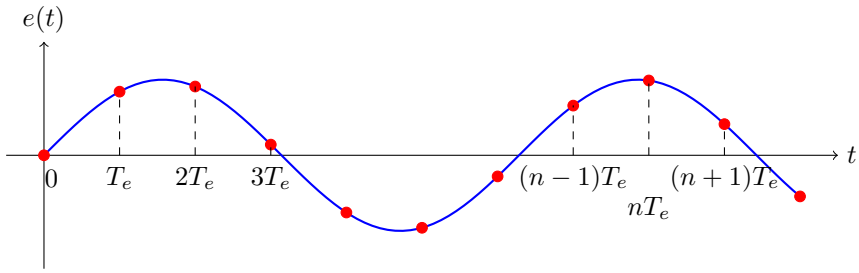
Démonstration :

Chapitre 2

TRANSFORMÉE en $\mathcal{Z}$

I Généralités

La transformée en $\mathcal{Z}$ est un outil de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques discrets.
Un signal échantillonné $e^*(t)$ n'est connu qu'aux instants d'échantillonnage 0, $T_e\,, 2T_e, 3T_e, \ldots nT_e, (n+1)T_e \ldots$ où T_e est la période d'échantillonnage.



Le signal $e^*\,(t)$ est le produit du signal $e\,(t)$ par la distribution peigne de Dirac $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$:

$$e^*(t) = e(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$
$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT_e)\delta(t - kT_e) = e(0)\delta(t) + e(T_e)\delta(t - T_e) + e(2T_e)\delta(t - 2T_e) + ...$$

Remarque 5 :
En temps discret la distribution $\delta(t - kT_e)$ est nulle partout sauf en $t = kT_e$ où elle est égale à l'unité.
Il y a une différence entre la distribution $\delta(t - kT_e)$ et l'impulsion de Dirac déjà rencontré en temps continu, également notée $\delta(t - kT_e)$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\,\mathrm{d}t = 1$.
En temps discret : $e(t)\delta(t - kT_e) = e(kT_e)$.
En temps continu : $\int_{-\infty}^{\infty} e(t)\delta(t - kT_e)\,\mathrm{d}t = e(kT_e)$.
On considère que la distribution $t \mapsto \delta(t - kT_e)$ admet encore pour transformée de Laplace $p \mapsto \mathrm{e}^{-pkT_e}$.

Intéressons-nous à la transformée de Laplace E^* du signal échantillonné e^*. D'après la remarque précédente , on obtient :
$E^*(p) = e(0) + e(T_e)\,\mathrm{e}^{-pT_e} + e(2T_e)\,\mathrm{e}^{-p2T_e} + ... + e(nT_e)\,\mathrm{e}^{-pnT_e} + ...$ soit $E^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT_e)\left(\mathrm{e}^{-pT_e}\right)^k$.
Posons $z = \mathrm{e}^{pT_e}$, soit $\mathrm{e}^{-pT_e} = \frac{1}{z} = z^{-1}$, avec p et z des variables complexes. On obtient :

$$E^*\,(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT_e)\,z^{-k}$$

DÉFINITION 3 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty;0[$ et $T_e > 0$.
On appelle "séquence numérique" associée à f, notée f_e, la suite des valeurs obtenues par échantillonnage de f selon la période T_e.
La suite f_e est notée : $f_e = \{f(nT_e)\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ voire $f_e = \{f_n\}$ où $f_n = f(nT_e)$.

DÉFINITION 4 : La transformée en $\mathcal{Z}$ de la séquence numérique $f_e = \{f(nT_e)\}$ est définie par

$$\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\, z^{-n}.$$

On a alors : $\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n}{z^n}$ soit $\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}$.

II Exemples de transformées

II.1 Suite échelon-unité

On rappelle que cette fonction, appelée également fonction de Heaviside, est notée u voire H.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u(nT_e) = 1$

PROPRIÉTÉ 5 : $\mathcal{Z}\{u(nT_e)\}(z) = \dfrac{z}{z-1}$ (le domaine de définition correspond à l'extérieur du disque-unité).

II.2 Suite de Dirac

Soit $\delta(0) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\delta(n) = 0$. On a : $\mathcal{Z}\{\delta(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(nT_e) z^{-n}$ soit $\mathcal{Z}\{\delta(nT_e)\}(z) = \delta(0)\, z^0 = 1$.

PROPRIÉTÉ 6 : $\mathcal{Z}\{\delta(nT_e)\}(z) = 1$.

II.3 Suite Exponentielle

On considère la fonction f définie par $f(t) = a^t u(t)$ où $a > 0$.

PROPRIÉTÉ 7 : $\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}\right\}(z) = \dfrac{z}{z - a^{T_e}}, \quad |z| > \left|a^{T_e}\right|$

Remarque 6 :
Pour $a = \mathrm{e}^{\alpha}$, on a : $\mathcal{Z}\left\{\mathrm{e}^{n\alpha T_e}\right\}(z) = \dfrac{z}{z - \mathrm{e}^{\alpha T_e}}$.
Si $T_e = 1$ alors $\mathcal{Z}\left\{\mathrm{a}^{n}\right\}(z) = \dfrac{z}{z-a}$ et $\mathcal{Z}\left\{\mathrm{e}^{n\alpha}\right\}(z) = \dfrac{z}{z - \mathrm{e}^{\alpha}}$.

III Propriétés

III.1 Linéarité

Propriété 8 : Soient x et y deux suites, λ et μ étant des nombres complexes.

$$\mathcal{Z}\left\{\lambda x(n) + \beta y(n)\right\}(z) = \lambda \mathcal{Z}\left\{x(n)\right\}(z) + \beta \mathcal{Z}\left\{y(n)\right\}(z)$$

Cette propriété est utilisable pour calculer, par exemple, la transformée en $\mathcal{Z}$ de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)$ échantillonnée avec la période T_e (cf. formulaire pour la transformée de $t \mapsto \sin(\omega t)$).

On a donc la propriété suivante :

Propriété 9 : $\mathcal{Z}\left\{\cos(\omega n T_e)\right\}(z) = \dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$.

III.2 Séquences décalées

III.2.1 (i) Séquence retardée

Soit la séquence retardée de mT_e avec $m \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^-$.
On considère alors la suite (x_n) définie par : $x(nT_e) = f(nT_e - mT_e)$.

PROPRIÉTÉ 10 : $\mathcal{Z}\{f([n-m]T_e)\}(z) = \frac{1}{z^m}\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.

REMARQUE 7 : Pour $m = 1$, on a : $\mathcal{Z}\{f[(n-1)T_e]\}(z) = \frac{1}{z}\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}$.

REMARQUE 8 : Cas particulier de la suite de Dirac retardée
Notons $\delta_k(n) = \begin{cases} 0 \; si \; n \neq k \\ 1 \; si \; n = k \end{cases}$ soit $\delta_k(nT_e) = \delta([n-k]T_e)$.
$\mathcal{Z}\{\delta([n-k]T_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_k(nT_e)\, z^{-n} = z^{-k}$ donc $Z\{\delta_k(nT_e)\}(z) = \frac{1}{z^k}$.

III.2.2 (ii) Séquence avancée

Soit la séquence avancée de mT_e et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^-$.
On considère alors la suite (x_n) définie par : $x(nT_e) = f(nT_e + mT_e)$ où n et m sont des entiers naturels.

PROPRIÉTÉ 11 : $\mathcal{Z}\{f([n+m]T_e)\}(z) = z^m \left[\mathcal{Z}\{f\} - \sum_{p=0}^{m-1} z^{-p} f(pT_e)\right]$.

Remarque 9 :
$\mathcal{Z}\left\{f\left[(n+1)T_e\right]\right\}(z) = z\left[\mathcal{Z}\left\{f\left(nT_e\right)\right\} - f(0)\right]$

$\mathcal{Z}\left\{f\left[(n+2)T_e\right]\right\}(z) = z^2\left[\mathcal{Z}\left\{f\left(nT_e\right)\right\} - f(0) - \frac{1}{z}f\left(T_e\right)\right]$.

III.3 Transformée de $\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\}$

Notons F la transformée en Z associée à $\{f(nT_e)\}$. On a :
$\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{nT_e}f(nT_e)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)^{-n}$.

Ainsi : $\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\} = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$.

Propriété 12 :
- $\mathcal{Z}\left\{a^{nT_e}f(nT_e)\right\} = F\left(\frac{z}{a^{T_e}}\right)$.
- $\mathcal{Z}\left\{\mathrm{e}^{-\alpha nT_e}f(nT_e)\right\}(z) = F\left(z\mathrm{e}^{\alpha T_e}\right)$.

III.4 Transformée de $\{nT_e f\left(nT_e\right)\}$

$$\mathcal{Z}\left\{nT_e f(nT_e)\right\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nT_e f(nT_e)z^{-n} = T_e\sum_{n=0}^{\infty} nf(nT_e)z^{-n}$$

Notons F la transformée en $\mathcal{Z}$ associée à $\{f(nT_e)\}$.
Sur le même disque de convergence, par dérivation, on a :
$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\left(-nz^{-n-1}\right)$ soit $F'(z) = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nf(nT_e)z^{-n}$.
Il en résulte que : $-zF'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nf\left(nT_e\right)z^{-n}$ d'où $T_e\sum_{n=0}^{\infty} nf\left(nT_e\right)z^{-n} = -zT_e.F'(z)$.

Propriété 13 : On en déduit que : $\mathcal{Z}\left\{nT_e f(nT_e)\right\}(z) = -zT_e.F'(z)$.

Exercice 2.1 *Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $\{nu(n)\}$ où u est la fonction échelon-unité.*

III.5 Transformée d'un produit de convolution

PROPRIÉTÉ 14 : La transformée en $\mathcal{Z}$ d'un produit de convolution est le produit des transformées en $\mathcal{Z}$. Ainsi :

$$\mathcal{Z}\{x \star y\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) \times \mathcal{Z}\{y\}(z)$$

où $(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)\, y(k)$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\{x \star y\})(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x \star y\}(n)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)\, y(k)\, z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(m)\, y(k)\, z^{-m} z^{-k} \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, z^{-m} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} \right)
\end{aligned}$$

III.6 Théorème de la valeur initiale

On rappelle que $\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(nT_e)}{z^n} = f(0) + \frac{f(T_e)}{z} + \frac{f(2T_e)}{z^2} + ... + \frac{f(nT_e)}{z^n} + ...$

Théorème 2 :

$$f(0) = \lim_{z \to +\infty} \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$$

III.7 Théorème de la valeur finale

Théorème 3 : $\lim_{n \to \infty} f(nT_e) = \lim_{z \to 1} (z-1)\mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$.

Ce théorème est admis.

IV Transformation en Z inverse

L'objectif est de déterminer l'original à partir d'une fonction F de la variable z.
Pour ce faire, on peut, par exemple :

- Décomposer $F(z)$ en éléments simples et se référer à la table de transformées usuelles tout en utilisant les propriétés de linéarité.
- Développer $F(z)$ en série selon la variable $\frac{1}{z}$.

Notation : si $F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_e)\}(z)$ alors $\{f(nT_e)\} = \mathcal{Z}^{-1}(F)$.

Exercice 2.2 *Déterminer l'original associé à la fonction F définie par $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.*

Exercice 2.3 *Déterminer l'original associé à la fonction F définie par $F(z) = e^{\frac{1}{z}}\left(\frac{z+1}{z}\right)$.*

V Applications de la transformée en Z

V.1 Application en automatique et électronique : la transformée bilinéaire

En automatique ou électronique, de nombreuses fonctions qui étaient réalisées analogiquement (ex : filtres analogiques) sont aujourd'hui réalisées numériquement, le numérique apportant une plus grande souplesse dans le réglage des paramètres. En effet, au lieu de changer la valeur d'une résistance, il suffit de changer un coefficient dans une relation de récurrence. La transformée en $\mathcal{Z}$ se révèle un outil intéressant pour obtenir la relation de récurrence à implémenter dans le processeur. Pour illustrer la méthode, prenons le cas simple de la réalisation d'un filtre du premier ordre analogique obéissant à l'équation différentielle :

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = x(t)$$

On veut maintenant réaliser numériquement le filtre, pour cela le signal d'entrée $x(t)$ est échantillonné à la fréquence f_e. Les échantillons $x(kT_e)$ sont traités dans un processeur et les échantillons de sortie $y(kT_e)$ sont envoyés vers un bloc de reconstruction analogique.
Le processeur ne pouvant traité que des valeurs discrètes, on remplace alors l'équation différentielle précédente par une équation aux **différences finies**.
Ainsi, l'équation différentielle précédente devient :

$$\tau\frac{y(nT_e) - y((n-1)T_e)}{T_e} + y(nT_e) = x(nT_e)$$

ou plus simplement : $\tau\dfrac{y_n - y_{n-1}}{T_e} + y_n = x_n$.
E posant $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(nT_e)\}(z)$ et $X(z) = \mathcal{Z}\{x(nT_e)\}(z)$, il vient :

$$\frac{\tau}{T_e}\left(Y(z) - z^{-1}Y(z)\right) + Y(z) = X(z)$$

Le système numérique est caractérisé par sa transformée $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1+\frac{\tau}{T_e}) - \frac{\tau}{T_e}z^{-1}}$$

C'est l'équivalent de la transformée de Laplace pour le système à temps continu. Dans le cas présent, le système du premier ordre a pour transformée de Laplace $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$.

On passe donc de $\mathcal{L}(p)$ à $\mathcal{Z}\{h(nT_e)\}(z) = H(z)$ en remplaçant la variable p par $\frac{1}{T_e}\frac{(z-1)}{z}$ dans $\mathcal{L}(p)$.

REMARQUE 10 : L'équation aux différences finies écrite précédemment est évidemment une approximation de l'équation différentielle, approximation d'autant meilleure que T_e est très inférieure à la constante de temps τ. Par ailleurs la dérivée à gauche n'est pas en général égale à la dérivée à droite. L'écriture de l'équation aux différences précédente repose sur un arbitraire, en effet nous aurions aussi pu écrire :

$$\tau\frac{y_n - y_{n-1}}{T_e} + y_{n-1} = x_{n-1}$$

La somme des deux équations aux différences $\begin{cases} \tau\frac{y_n-y_{n-1}}{T_e} + y_{n-1} = x_{n-1} \\ \tau\frac{y_n-y_{n-1}}{T_e} + y_n = x_n \end{cases}$ donne l'équation aux différences suivante :

$$y_n\left(1+\frac{2\tau}{T_e}\right) + y_{n-1}\left(1-\frac{2\tau}{T_e}\right) = x_n + x_{n-1}$$

La transformée en Z devient : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{2\tau}{T_e}\right)+\left(1-\frac{2\tau}{T_e}\right)z^1}$. On peut vérifier maintenant que $H(z)$ s'obtient en remplaçant p par $\frac{2}{T_e}\frac{(z-1)}{(z+1)}$ dans $H(p)$. Cette transformée porte le nom de **transformée bilinéaire**.

Elle est très utilisée en automatique et électronique et donne de meilleurs résultats que la transformée décrite précédemment.

V.2 Équations aux différences du premier ordre (à coefficients constants)

Considérons l'équation aux différences

$$a\,y([n+1]\,T_e) + b\,y(nT_e) = x(nT_e)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(x(nTe))$ est connue et $(y(nTe))$ une séquence inconnue vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$.

On pose : $\mathcal{Z}[x(nTe)] = X(z)$, $\mathcal{Z}[y(nTe)] = Y(z)$.

En utilisant la transformation en $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}[y(nTe+Te)] = z[Y(z) - y(0)]$ on a :

$$a\,z\,(Y(z) - y_0) + bY(z) = X(z)$$

qui conduit à

$$Y(z) = \frac{a\,y_0 z}{az+b} + \frac{X(z)}{az+b}$$

L'utilisation de la transformée inverse permet d'obtenir la solution $y_e = \{y(nT_e)\}$.

Exercice 2.4 *Résoudre l'équation aux différences suivante (avec $T_e = 1$) :*
$y(n+1) - 2y(n) = n$ *avec* $y(0) = 0$.

V.3 Équations aux différences du deuxième ordre

De la même façon, la discrétisation d'une équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre conduit à une relation de la forme :

$$y(n) + ay(n+1) + by(n+2) = \alpha x(n) + \beta x(n-1) + \gamma x(n-2)$$

On utilise alors la transformation en $\mathcal{Z}$ et les relations suivantes :
$\mathcal{Z}\{y(n+1)\} = z[Y(z) - y(0)]$
$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2\left[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)\right]$.

Exercice 2.5 *Résoudre l'équation aux différences suivante (avec $T_e = 1$) :*
$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$ *avec* $y(0) = 0 \quad et \quad y(1) = 1$.

On a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.