Année universitaire 2024-2025

COURS
OUTILS MATHÉMATIQUES et LOGICIELS

SEMESTRE 2
B.U.T. 1

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

Chapitre 1

APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

I Compléments de trigonométrie

I.1 Formules d'addition et de duplication

On rappelle que, pour tout réel θ, on a $\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$.
$\cos\theta$ et $\sin\theta$ correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{j\theta}$.
Considérons $\mathrm{e}^{j(a+b)}$ afin de déterminer des formules liées à $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$:
✍

Propriété 1 : **[Formules d'addition]**

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Propriété 2 : **[Formules de duplication]**

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

✍

Propriété 3 : [Formules de réduction du carré]

- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

✍

Propriété 4 : [Formules de développement]

- $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b$.
- $\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b$.
- $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$.
- $\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b$.

Méthode pour retrouver, par exemple, $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b$. ✍

On déduit aisément la propriété suivante :

Corollaire 1 : [Formules de factorisation]

- $\cos a\cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$.
- $\sin a\sin b = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$.
- $\sin a\cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.
- $\cos a\sin b = \dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$.

I.2 Transformation d'une expression de la forme $a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t)$

Théorème 1 : Soient a et b deux réels non nuls. On peut déterminer $A>0$ et φ tels que

$$a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

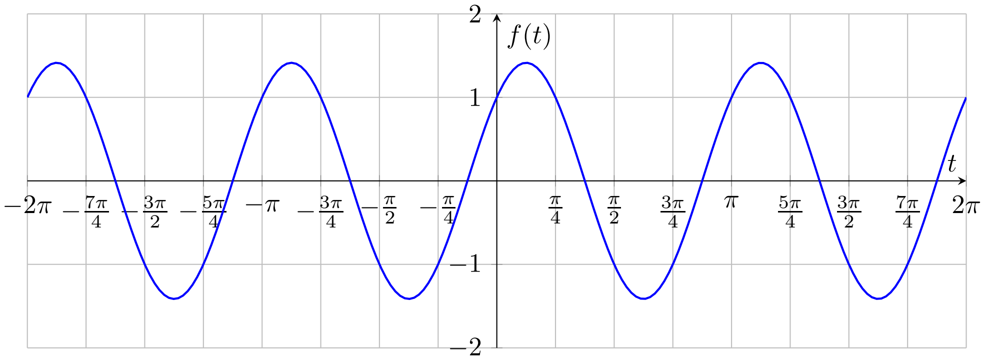
en considérant

$$A=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a>0 \\ \pi+\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a<0 \end{cases}$$

Démonstration :

Exercice 1.1 *Exprimer* $\cos(2t) + \sin(2t)$ *sous la forme* $A\sin(\omega t + \varphi)$.

Représentation de $t \mapsto \cos(2t) + \sin(2t)$



II Linéarisation

II.1 Formule de Moivre

Propriété 5 : [Formule de Moivre]
Soit θ un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

En effet :

II.2 Formule d'Euler

Théorème 2 : [Formules d'Euler]
Soit θ un réel. On a

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

En effet :

II.3 Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

La linéarisation d'un polynôme dont la variable est $\cos x$ ou $\sin x$ consiste à l'identifier à un polynôme du premier degré des variables $\cos x$, $\sin x$, $\sin(2x)$, ...
A noter que cette méthode utilise les formules d'Euler et le développement de $(a+b)^n$ que l'on obtient à partir de la formule du binôme de Newton.
Dans ce cours, nous nous limiterons aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 1.2 *Soient a et b deux réels quelconques. Déterminer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.*

Exercice 1.3 *Linéariser $\cos^3 x$.*

III Factorisation de polynômes à coefficients réels

III.1 Factorisation d'un polynôme du second degré

Soient a, b et c trois réels avec a non nul.
On rappelle qu'un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ (du second degré) admet :
• une racine x_0 si $\Delta = 0$. On a alors

$$P = a\,(x - x_0)^2$$

• deux racines x_1 et x_2 si $\Delta \neq 0$. On a alors

$$P = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

III.2 Division euclidienne

Définition 1 : L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}[X]$.

Théorème-Définition 1 : Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.
Effectuer la division euclidienne de A par B revient à trouver deux polynômes (uniques) Q et R tels que : $A = BQ + R$ avec $d°R < d°B$.
Q s'appelle le quotient, R le reste de la division euclidienne de A par B.
Si $R = 0$, on dit que B divise A.

Exercice 1.4 *Effectuer la division euclidienne de* $X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X + 1$ *par* $X^2 + 3X - 1$.

III.3 Racine, multiplicité

Définition 2 : On dit que α est une **racine** du polynôme P si $P\,(\alpha) = 0$.

Théorème 3 : P est divisible par le polynôme $X - \alpha$ si et seulement si α est **racine** du polynôme P.

En effet :
$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Définition 3 : Soit P un polynôme non nul et α une racine de P.
On appelle **multiplicité** de la racine α l'entier $m \geq 1$ que $\left\{ \begin{array}{l} (X-\alpha)^m \text{ divise } P \\ (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \end{array} \right.$.

Exercice 1.5 *On considère* $P = (X-6)^4 (X+2)^2$.
6 *est une racine de* P *de multiplicité* ……
….. *est une racine* ………………………….*de* P.

Théorème 4 : (Théorème de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme à coefficients réels admet au moins une racine complexe.

Corollaire 2 : Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme de degré $n > 0$ est scindé, c'est-à-dire qu'il se factorise en produit de n polynômes du premier degré ; il a exactement n racines (en tenant compte des ordres de multiplicité).

Exercice 1.6 *Factoriser, au maximum, le polynôme* $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

Théorème 5 :
Soit P un polynôme à coefficients réels.
Si α est une racine complexe du polynôme P alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P.
De plus, $(X-\alpha).(X-\bar{\alpha}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

En effet :

Théorème 6 : (Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs dans $\mathbb{R}[X]$)
Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :
• du premier degré
• du second degré avec un discriminant négatif.

Corollaire 3 : Un polynôme de degré 3 est toujours réductible.

Chapitre 2

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

I Généralités

Définition 1 : On appelle fraction rationnelle tout quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes P et Q.
Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est dite irréductible lorsque il n'existe pas de racine commune à P et Q.
Les polynômes P et Q sont alors dits premiers entre eux.

Exercice 2.1 *Ecrire* $\dfrac{2X^2 - 4X - 6}{X^3 - 7X^2 + 7X + 15}$ *sous forme d'une fraction rationnelle irréductible.*

II Décomposition en éléments simples

Théorème-Définition 2 : Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible.
La division euclidienne de P par Q nous permet d'écrire : $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$.
Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$.

Remarque 1 : La partie entière de $F = \frac{P}{Q}$ s'obtient en effectuant la division de P par Q.

Exercice 2.2 *Ecrire sous la forme* $E + \frac{R}{Q}$ *la fraction rationnelle suivante :* $F = \dfrac{X^2 + 7X + 13}{X + 5}$.

Nous admettrons que le polynôme Q peut s'écrire de manière unique comme le produit de polynômes irréductibles

(polynômes du premier degré voire du second degré dont le discriminant est négatif si on travaille dans $\mathbb{R}$).
Ainsi : $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \geq 1$, les Q_i étant deux à deux premiers entre eux et irréductibles.

Exercice 2.3 *Déterminer les polynômes Q_i et les entiers associés α_i pour $Q = X^3 + 2X^2 + X$.*

Définition 2 : Les racines du polynôme Q sont appelés pôles de la fraction rationnelle.

Théorème 1 : (admis)
La fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{ij}}{(Q_i)^j}$$

où, pour tout $i \in \{1; 2; \cdots; r\}$ et tout $j \in \{1; 2; \cdots; \alpha_i\}$, $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$.

Remarque 2 : Comme $\deg(P_{ij}) < \deg(Q_i)$, deux cas peuvent se présenter :
- si Q_i est un polynôme du premier degré alors P_{ij} est une constante (de la forme λ).
- si Q_i est un polynôme du second degré avec $\Delta < 0$ alors P_{ij} est de la forme $\lambda x + \mu$.

Propriété 6 : (Décompositon d'une fraction rationnelle avec des coefficients réels)
Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on décomposera le quotient $\frac{R}{Q}$ sous la forme d'une somme :
- d'**éléments simples de première espèce** du type $\dfrac{\lambda}{(x-\alpha)^j}$ avec λ réel et j entier naturel non nul.
- d'**éléments simples de deuxième espèce** du type $\dfrac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^j}$ avec λ et μ réels , j entier naturel non nul ($b^2 - 4ac < 0$).

Exercice 2.4 *Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle :* $F(X) = \dfrac{X+2}{X^2-9}$.

Exercice 2.5 *Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle :* $G(X) = \dfrac{1}{X^4 - 1}$.

Exercice 2.6 *Décomposer, en éléments simples, la fraction rationnelle :* $H(X) = \dfrac{2X^3+1}{X^3+X^2}$.

Chapitre 3

COMPLÉMENTS D'INTÉGRATION

I Intégration par parties

Théorème 1 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ à dérivées continues sur $[a;b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration :

Méthode ALPES : On dérive (passage de v à v') la première fonction trouvée (en lisant de gauche à droite) ...

A	L	P	E	S

Exercice 3.1 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\ dx$.

II Changement de variable

Théorème 2 :
Soient α et β deux réels, φ étant une fonction continûment dérivable strictement monotone sur $[\alpha;\beta]$ et f une fonction continue sur $[a;b]$ avec $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration :

Exercice 3.2 *Calculer* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ *à l'aide du changement de variable* $x=\sin t$.

III Intégration et parité

On rappelle que :
f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique.
Pour tout réel a, on a :

$$\int_a^{a+T} f(t)\;\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et impaire.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Corollaire 4 : La valeur moyenne d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et impaire est nulle.

Théorème 4 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et paire.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

IV Intégrales généralisées

IV.1 Fonctions localement intégrables

Définition 1 : Une fonction définie sur un intervalle I est localement intégrable si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle I.

On rappelle que toute fonction continue sur un fermé borné est intégrable.
On pourra donc utiliser la propriété suivante :

Propriété 7 : Toute fonction continue est localement intégrable.

IV.2 Intégrales généralisées

Définition 2 : Soit $[a;b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x f$ existe et est finie.

Sinon, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Remarque 1 : Cette définition s'étend aux intervalles de la forme $]a;b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.3 *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$.

Exercice 3.4 *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$.

Exercice 3.5 *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt$.

Chapitre 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

I.1 Généralités

Définition 1 : Une équation différentielle est du 1^{er} ordre si elle ne fait intervenir que la dérivée première d'une fonction.

Définition 2 : (Equations différentielles linéaires d'ordre 1)
On appelle équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre sur I à coefficients constants toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$\alpha y' + \beta y = s(x) \quad (E)$$

où α, β sont des constantes réelles,
s étant une fonction appelée second membre de l'équation différentielle.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$\alpha y' + \beta y = 0 \quad (E_H).$$

Exemple 1 *Différents types d'EDL d'ordre* 1

- $y' + 2y = 3x$ *est une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}$.
- $y' + 2y = 0$ *est l'équation homogène associée.*

Théorème 1 : Soient a et b des constantes réelles, c étant une fonction définie et continue sur I.
Si y_p est une solution particulière de (E) : $\alpha y' + \beta y = s(x)$ alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_p(x) + y_H(x)$$

avec y_H solution de l'équation homogène.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) une solution (particulière) de (E).

Démonstration :

I.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 2 : Soit α un réel non nul.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{\alpha x}$$

où C est une constante (réelle).

Démonstration : Considérons la fonction $f : x \mapsto y(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$.

Exercice 4.1 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \tau y' + y = 0$ où τ est une constante réelle.*

I.3 Recherche de solutions particulières

Considérons une équation différentielle (E).
Dans un premier temps, on peut chercher une solution particulière de "même nature" que le second membre.

- Si $s(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$.
- Si $s(x) = P(x)$ où P est un polynôme alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme (souvent de même degré).
- Si $s(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ alors on cherche y_p de la forme $y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Exercice 4.2 *Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des réels non nuls.*

Théorème 3 : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exercice 4.3 *Résoudre l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ avec $y(0) = 4$.*

II Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

II.1 Généralités

Définition 3 : Une équation différentielle linéaire du 2nd ordre, à coefficients constants, est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$ay" + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$) et f une fonction continue sur I.
On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre) l'équation

$$ay" + by' + cy = 0 \quad (E_H).$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E_C).$$

Exemple 2 *$y'' + y' - 2y = x$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.*

(E_H) : ....

(E_C) : ....

II.2 Résolution de l'équation homogène

Propriété 8 :

- Si y_1 et y_2 sont deux solutions (non proportionnelles) de (E_H) alors toutes les solutions de (E_H) sont de la forme $Ay_1 + By_2$ (A et B étant des constantes réelles).
- L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) une solution (particulière) de (E).

Déterminons une condition pour que la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{rx} \quad (r \in \mathbb{C})$ soit solution de l'équation homogène $ay" + by' + cy = 0$:
✍

Théorème 4 : (Solutions de (E_H) : $ay" + by' + cy = 0$ dans le cadre réel)

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes α et β.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution α.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$.
  Les solutions de (E_H) sont de la forme
  $$x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\left(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right)$$
  avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ soit $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où α est une racine de (E_C).
z est deux fois dérivable et on a : $y'(x) = (z' + \alpha z)\mathrm{e}^{\alpha x}$ et $y"(x) = (z" + 2\alpha z' + \alpha^2 z)\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Ainsi, si y est solution de (E_H) : $ay" + by' + cy = 0$ alors $\left[az" + 2a\alpha z' + a\alpha^2 z + bz' + b\alpha z + cz\right]\mathrm{e}^{\alpha x} = 0$.
Il en résulte que : $az" + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = 0$ avec α est une racine de (E_C).
On a donc : $az" + (2a\alpha + b)z' = 0$.

- Cas où (E_C) admet deux racines distinctes $(\Delta > 0)$
  Si β est l'autre solution de (E_C), on a : $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ donc $2a\alpha + b = 2a\alpha - a(\alpha + \beta) = a(\alpha - \beta)$. On a donc : $az" + a(\alpha - \beta)z' = 0$.
  z' est donc solution de l'ED $ay' + a(\alpha - \beta)' = 0$ soit $y' + (\alpha - \beta)y = 0$.
  D'après le premier paragraphe, on a : $z'(x) = C\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)x}$ soit $z(x) = A\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)x} + B$ où $A = \frac{C}{\beta-\alpha}$.
  L'égalité $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ induit $y(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x} + B\mathrm{e}^{\beta x}$ avec A et B réels quelconques.
- Cas où (E_C) admet une unique racine $(\Delta = 0)$
  $az" + a(\alpha - \beta)z' = 0$ conduit à $z" = 0$ car $\alpha = \frac{-b}{2a}$. Il s'avère que :
  $z" = 0$ ssi $z(x) = Ax + B$ avec A et B réels quelconques.
  On a donc : $y(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$ avec A et B réels quelconques.
- Cas où (E_C) admet deux racines complexes conjuguées $\lambda \pm j\mu$ $(\Delta > 0)$
  D'après ce qui précède, les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{(\lambda+j\mu)x} + D\mathrm{e}^{(\lambda-j\mu)x}$ où C et D sont des nombres complexes.
  Or, $C\mathrm{e}^{(\lambda+j\mu)x} + D\mathrm{e}^{(\lambda-j\mu)x} = \mathrm{e}^{\lambda x}\left(C\mathrm{e}^{j\mu x} + D\mathrm{e}^{-j\mu x}\right)$ et $C\mathrm{e}^{j\mu x} + D\mathrm{e}^{-j\mu x} = (C + D)\cos(\mu x) + j(C - D)\sin(\mu x)$.
  Comme $y(0)$ et $y\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)$ doivent être réels, on en déduit que $C + D$ et $j(C - D)$ sont réels (notés respectivement A et B).
  Ainsi, les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\left(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right)$ avec A et B parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* $y" + y = 0$.

II.3 Résolution de l'équation complète

Comme pour les équations différentielles du premier ordre, si y_p est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sont les fonctions y de la forme

$$y = y_p + y_H$$

avec y_H solution de l'équation homogène.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_H) une solution (particulière) de (E).
Pour chercher une solution particulière, on se contentera de chercher des solutions de même nature que le second membre, comme vu précédemment.

Exercice 4.5 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* $y" + y' - 2y = x$.

Exercice 4.6 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$, *l'équation différentielle* $y" + y' + y = e^{-x}$.

Chapitre 5

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

I Rappels et compléments

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{jbt}$. On a : $\varphi(t) = \cos(bt) + j\sin(bt)$.
Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi'(t) = -b\sin(bt) + jb\cos(bt) = jb\left[\cos(bt) + j\sin(bt)\right]$.
On a donc : $\varphi'(t) = jb\varphi(t)$ pour tout réel t.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{zt}$ et $z = a + jb$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
$f(t) = \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{jbt}$ donc, en dérivant le produit, on obtient : $f'(t) = (a\mathrm{e}^{at})\mathrm{e}^{jbt} + \mathrm{e}^{at}(jb\mathrm{e}^{jbt}) = (a + jb)\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{jbt}$.
Ainsi, $f'(t) = z\mathrm{e}^{zt}$ et, pour $z \neq 0$, la fonction $t \to \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}$ est une primitive de f.

Définition 1 : Fonction échelon unité u (appelée également fonction de Heaviside)
La fonction échelon unité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Ainsi, toute fonction étudiée dans ce chapitre telle que $f(t) = 0$ si $t < 0$ sera notée $t \mapsto f(t) \times u(t)$.

Définition 2 : Impulsion de Dirac (ou distribution de Dirac)
L'impulsion de Dirac est une mesure qui associe la valeur 1 au singleton $\{0\}$ et 0 à tout intervalle ne contenant pas 0.
On a donc : $\delta(\{0\}) = 1$ et $\delta(I) = 0$ pour tout I ne contenant pas 0.

En outre, δ peut s'écrire comme la limite suivante

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x) - u(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Remarque 1 : Il s'avère que $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$.
δ peut être considérée comme une fonction qui prend une "valeur" infinie en 0, et la valeur 0 partout ailleurs et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

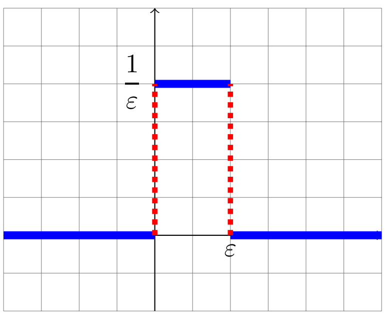


Figure 5.1 – Signal constant par morceaux

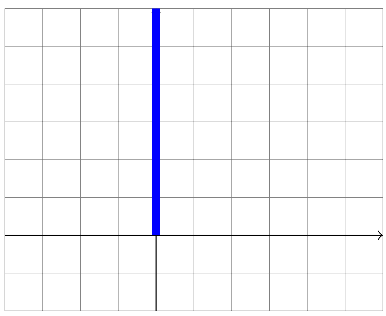


Figure 5.2 – Impulsion de Dirac

II Généralités

Définition 3 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
La transformée de Laplace de f est la fonction, notée $\mathcal{L}\{f\}$, définie par :

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5.1

1. *Déterminer le domaine de convergence de* $I = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$.
2. *Calculer les transformées de Laplace des fonctions* u *et* $f_\varepsilon : x \mapsto \frac{u(x)-u(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$ *où* $\varepsilon > 0$.
3. *En déduire la transformée de Laplace de* δ.

Remarque 2 : Conditions suffisantes de l'existence de la transformée de Laplace

Soit f est continue par morceaux sur $[0; a]$ pour tout réel $a > 0$.
Supposons qu'il existe deux réels $M > 0$ et α ainsi qu'un réel t_0 tels que : $\forall t \geq t_0$, on a : $|f(t)| < M\mathrm{e}^{\alpha t}$.

La transformée de Laplace de f est définie pour tout p tel que : $\mathrm{Re}(p) > \alpha$.

III Transformées de signaux usuels

1. **Distribution de Dirac :**

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta\}(p) = 1}$$

2. **Echelon unité :**

$$\boxed{\mathcal{L}\{u\}(p) = \frac{1}{p}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

3. **Fonction "Rampe" :** $t \mapsto tu(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\{tu(t)\}(p) = \frac{1}{p^2}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

4. **Fonction "Puissances" :** $t \mapsto t^n u(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^n u(t)\right\}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

5. **Fonction exponentielle :** $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}u(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at}u(t)\right\}(p) = \frac{1}{p+a}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(a+p) > 0}$$

✍

6. **Fonctions trigonométriques :**

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)u(t)\right\}(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)u(t)\right\}(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(p) > 0}$$

✍

IV Propriétés

Théorème 1 : [Linéarité de la transformée de Laplace]
Soient f et g deux fonctions admettant une transformée de Laplace, λ et μ étant deux réels.

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$$

Cette égalité, découlant directement de la linéarité de l'intégrale, est vérifiée pour tout complexe p tel que les intégrales considérées convergent.

Théorème 2 : [Transformée de la dérivée]
Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace ainsi que sa dérivée.

$$\mathcal{L}(f')(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$

✍

Remarque 3 : Si la fonction f n'est pas définie en 0, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+) \text{ où } f(0^+) = \lim_{0^+} f.}$$

Corollaire 5 : [Transformée de la dérivée seconde]
Soit f une fonction telle que f, f' et f" admettent une transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}(f")(p) = p^2 \times \mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

En effet :

Corollaire 6 : [Transformée de la dérivée n-ième]
Soit f une fonction dont les n dérivées successives admettent une transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(p) = p^n \cdot \mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

V Transformées de fonctions

Pour ce paragraphe on considèrera une fonction f avec $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
Les résultats énoncés le sont sous réserve de converge de l'intégrale associée à la transformée de laplace.

V.1 Transformée de $t \mapsto e^{-at} f(t)$

Théorème 3 : $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-at} f(t)\right\}(p) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(p+a)$

✍

Exercice 5.2 *Déterminer la transformée de Laplace du signal amorti* $g : t \mapsto e^{-2t}\sin(\omega t)u(t)$.

V.2 Transformée de $t \mapsto f(at)$ avec $a > 0$ (changement d'échelle)

Théorème 4 : $\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(p) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\right\}\left(\dfrac{p}{a}\right)$

Exercice 5.3 *Calculer la transformée de* $g : t \mapsto 2tu(t)$ *en utilisant deux méhodes.*

V.3 Transformée de $t \mapsto tf(t)$ (produit par une rampe)

Théorème 5 : (Résultat admis)

$$\mathcal{L}\{t\, f(t)\}(p) = -\left(\mathcal{L}\{f\}\right)'(p)$$

Exercice 5.4 *Calculer la transformée de $f : t \mapsto te^{-at}$ en utilisant le résultat précédent.*

V.4 Transformée de $t \mapsto f(t-a)u(t-a)$ (décalage temporel avec $a > 0$)

Théorème 6 :

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)u(t-a)\right](p) = e^{-ap}\mathcal{L}\left[f(t)\,u(t)\right](p)$$

✍

Remarque 4 :
Un retard de a sur un signal se traduit par une multiplication par e^{-ap} de sa transformée.

Exercice 5.5 *Calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto tu(t-1)$.*

V.5 Transformée de signaux périodiques

Soit f une fonction T-périodique de motif f_0. On a donc :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0;T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 7 : (Admis)

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \frac{\mathcal{L}\{f_0\}(p)}{1 - \mathrm{e}^{-pT}}$$

VI Transformation de Laplace inverse

Définition 4 : Soit F la transformée de Laplace d'une fonction f.
On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de F, la fonction f.
On note : $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$

Théorème 8 : (Admis)
Si les fonctions f considérées vérifient les conditions suffisantes d'existence de la transformée de Laplace, l'**original** f d'une fonction du type F est **unique**.

A retenir : Si F est une fraction rationnelle, on la décomposera en éléments simples.

Exercice 5.6 *Déterminer l'original f de la fonction F définie par :*

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)}$$

VII Théorème de la valeur initiale ; Théorème de la valeur finale

Théorème 9 : Si les limites considérées existent, on a :
- $\lim\limits_{p \to +\infty} p\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) = f(0^+)$ (valeur initiale)
- $\lim\limits_{p \to 0} p\mathcal{L}\left\{f\right\}(p) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (valeur finale)

REMARQUE 5 : Ces relations découlent de la relation : $\mathcal{L}\left(f'\right)(p) = p \times \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$

VIII Applications aux équations différentielles

L'intégration d'une équation différentielle **linéaire**, à **coefficients constants**, s'effectue à l'aide de la transformée de Laplace de la façon suivante :
- Ecrire les transformées de Laplace de chaque membre de l'équation différentielle
- Exprimer la transformée de Laplace en fonction de p
- En déduire, par transformation inverse, la fonction solution de l'équation différentielle proposée

Exercice 5.7 *Résoudre, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle*

$$x"(t) + x(t) = 1$$

avec $x(0) = x'(0) = 0$.

Chapitre 6

SUITES ET SÉRIES

I Suites

I.1 Généralités

Définition 1 : On appelle suite réelle (ou numérique) toute application u d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Au lieu de la noter $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}$, on la note fréquemment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voire (u_n).
u_n est appelé le terme général de la suite (ainsi que terme de rang n).
L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1 : On appellera désormais suite (réelle), toute application de $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Une suite (u_n) est dite :
- croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- constante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 3 : La suite (u_n) est dite :
- majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

On peut définir une suite (u_n) de trois manières différentes.
- Définition explicite :
  Chacun des termes est exprimé en fonction de n.
  Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est définie de façon explicite.
- Définition par récurrence :
  Les premiers termes de la suite étant définis, un terme est défini en fonction des précédents. Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \cos u_n$ est définie par récurrence.
- Définition implicite :
  On connaît l'existence de chacun des termes de la suite sans pour autant être en mesure de les exprimer de manière explicite. Ainsi, f étant une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir la suite (u_n) par $f(u_n) = n$.

I.2 Convergence et divergence des suites

Définition 4 : Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel. On dit que (u_n) converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On notera $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$.
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Propriété 1 :
- On ne change pas la nature d'une suite si l'on change un nombre fini de termes.
- Si une suite (u_n) admet une limite ℓ alors celle-ci est unique.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' ; a et b deux réels.
  - la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
  - la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $\ell \times \ell'$.
  - la suite $(a \times u_n + b \times v_n)$ converge vers $a\ell + b\ell'$.
  - de plus, si $\ell \neq 0$, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Propriété 2 : Toute suite convergente est bornée.

I.3 Suites arithmétiques

Définition 5 : Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = r + u_n$.
r est appelé raison de (u_n).

Propriété 3 : Soit n un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 4 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2} r = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

I.4 Suites géométriques

Définition 6 : Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = qu_n$.
q est appelé raison de (u_n).

Propriété 5 : Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Propriété 6 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $|q| < 1$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| > 1$ alors (u_n) diverge.

Ainsi, une suite géométrique de raison q est convergente si et seulement si

$$|q| < 1$$

Démonstration :

- Cas où $|q| < 1$
  $|q|^n = \mathrm{e}^{n \ln |q|}$
- Cas où $|q| > 1$

II Séries

II.1 Généralités

Définition 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Le réel S_n défini par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle de rang n.

Remarque 2 :
Pour une suite définie à partir d'un rang n_0 , les sommes partielles ne commenceront qu'au rang n_0.
On peut aussi réindexer les termes de la suite et ainsi considérer que celle-ci est définie à partir du rang 0.

Définition 8 : La suite (S_n) des sommes partielles s'appelle série de terme général u_n.
On la note : $\sum u_n$ voire $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 3 *Exprimons S_n en fonction de n lorsque (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.*

II.2 Nature des séries numériques

Définition 9 : On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) admet une limite finie.
Cette limite est appelée somme de la série.
On note : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Notation : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$ alors on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 6.1 *Montrer que la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et calculer sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.*

Exercice 6.2 *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *et calculer* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Définition 10 : On dira que la série de terme général u_n diverge si elle ne converge pas.

Remarque 3 : On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

Propriété 7 : Condition nécessaire de convergence
Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

II.3 Séries géométriques

Considérons la série de terme général $u_n = q^n$:

Théorème 2 : La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
Lorsque $|q| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

II.4 Structure de l'ensemble des séries convergentes

Théorème 3 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes, a et b étant des réels alors la série

$$\sum (au_n + bv_n) \text{est convergente}$$

On pourra donc écrire : $\sum(au_n + bv_n) = a\sum u_n + b\sum v_n$.

Remarque 4 : Pour avoir l'égalité précédente, Il faut que chacune des séries converge!
$\sum(u_n + v_n)$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ...

II.5 Règles de d'Alembert et Cauchy

Ces deux règles peuvent permettre de déterminer la nature d'une série.

Théorème 4 : Règle de d'Alembert
Soit (u_n) une suite à termes **strictement positifs** telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

- Si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $L = 1$ alors on ne peut conclure.

Théorème 5 : Règle de cauchy
Soit (u_n) une suite à termes **strictement positifs** telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$$

- Si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $L = 1$ alors on ne peut conclure.