

Année universitaire 2024-2025

COURS OUTILS MATHÉMATIQUES et LOGICIELS

SEMESTRE 1 B.U.T. 1

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : <http://flarnal.e-monsite.com>

Table des matières

1	GENERALITES SUR LES FONCTIONS	1
I	Trigonométrie	1
I.1	Mesure principale d'un angle	1
I.2	Généralités sur les fonctions circulaires	1
I.3	Formules de Trigonométrie	3
II	Périodicité	4
III	Propriétés graphiques des fonctions	5
III.1	Domaine de définition	5
III.2	Graphe d'une fonction	5
III.3	Parité d'une fonction	6
IV	Fonction composée et applications graphiques	7
IV.1	Composée de fonctions	7
IV.2	Translations de courbes	7
V	Fonctions usuelles	8
V.1	Fonctions puissances et racines n -ième	8
V.2	La fonction logarithme népérien	8
V.3	Fonctions exponentielles	9
2	GENERALITES SUR LES NOMBRES COMPLEXES	11
I	Forme algébrique	11
I.1	Généralités	11
I.2	Nombre complexe conjugué	13
II	Nombres complexes et géométrie.	14
III	Forme trigonométrique	14
III.1	Module d'un nombre complexe	14
III.2	Arguments d'un nombre complexe non nul	15
IV	Forme exponentielle	16
IV.1	Généralités	16
IV.2	Propriétés algébriques	16
V	Equations du second degré du type $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)	17
V.1	Racines carrées	17
V.2	Équations du second degré à coefficients réels	17
3	LIMITES DE FONCTIONS	19
I	Rappel sur les limites à droite et à gauche	19
II	Limites des fonctions usuelles	19
III	Théorèmes généraux sur les limites	20
III.1	Limite d'une somme de deux fonctions	20
III.2	Limite d'un produit de deux fonctions	20
III.3	Limite de l'inverse d'une fonction	20
III.4	Limite d'un quotient de deux fonctions	20
III.5	Limite de la composée de deux fonctions	21
IV	Equivalents	21
V	Théorèmes de comparaisons	22
VI	Comportement asymptotique	22
VII	Croissances comparées des fonctions usuelles	23
4	DÉRIVATION ET CONTINUITÉ	25
I	Fonction dérivée	25
I.1	Généralités	25
I.2	Dérivées des fonctions usuelles	26

I.3	Dérivées et limites usuelles en 0	26
I.4	Opérations sur les fonctions dérivées	26
II	Applications de la dérivation	27
II.1	Sens de variations d'une fonction	27
II.2	Extremum d'une fonction	27
II.3	Plan d'étude d'une fonction	28
III	Continuité	28
III.1	Continuité en un point	28
III.2	Fonction continues usuelles	28
III.3	Propriétés	29
III.4	Prolongement par continuité	29
IV	Théorème des valeurs intermédiaires	29
5	IMPÉDANCES COMPLEXES	31
I	Généralités	31
II	Impédance complexe	31
II.1	Cas d'une résistance	31
II.2	Cas d'une bobine	32
II.3	Cas d'un condensateur	32
6	CALCUL INTÉGRAL	33
I	Intégrale de Riemann	33
II	Généralités	33
III	Lien Intégration-Primitive	34
IV	Primitives (Rappels)	35
V	Intégrales	35
V.1	Généralités	35
V.2	Utilisation de l'intégrale en GEII : Valeurs moyenne et efficace	37
7	FONCTIONS RECIPROQUES	39
I	Généralités	39
II	Fonction réciproque en lien avec la fonction tan : arctan	41

Chapitre 1

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I Trigonométrie

I.1 Mesure principale d'un angle

DÉFINITION 1 :

On appelle mesure principale d'un angle l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Par exemple, pour obtenir la mesure principale de $\frac{47\pi}{3}$, on commence par déterminer l'entier **pair** le plus proche de $\frac{47}{3}$.

Ainsi, la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{47\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

I.2 Généralités sur les fonctions circulaires

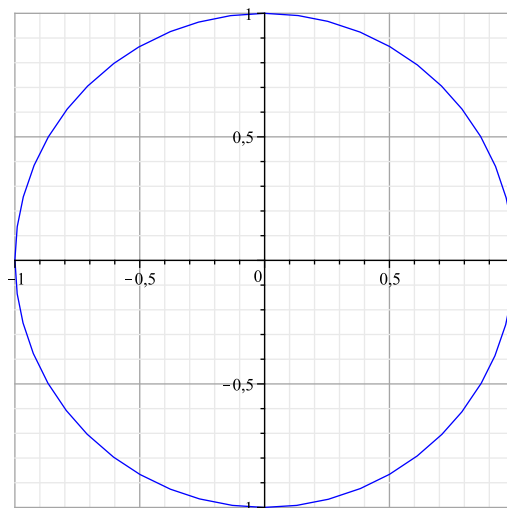
Dans tout ce chapitre, le plan sera rapporté à un repère orthonormal direct d'origine $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

DÉFINITION 2 :

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Soit M un point sur ce cercle tel que $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = x$.

$\cos(x)$ correspond à l'abscisse de M et $\sin(x)$ correspond à l'ordonnée de M .



PROPRIÉTÉ 1 :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1; 1]$.
- Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques.
- sin est impaire et cos est paire car, pour tout x réel, on a :
 $\cos(-x) = \dots\dots\dots$ et $\sin(-x) = \dots\dots\dots$.

En outre, on a les formules suivantes : $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
 On peut donc se restreindre à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ pour les étudier.

PROPRIÉTÉ 2 : (Variations des fonctions sin et cos)

Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction sin est croissante et la fonction cos est décroissante.

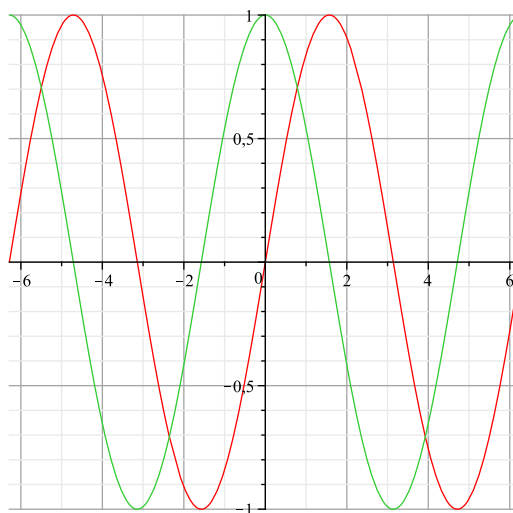
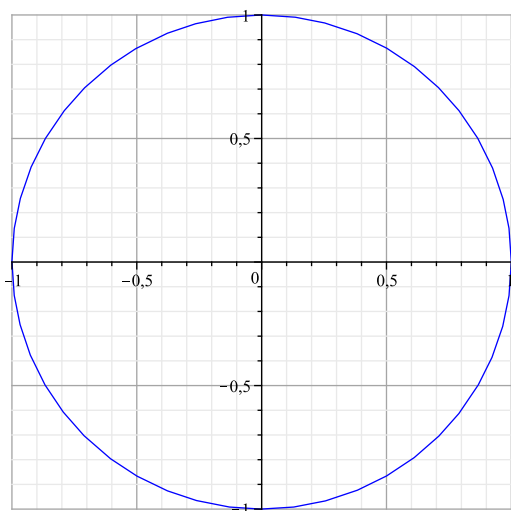


FIGURE 1.1 – Représentation graphique des fonctions sin et cos

La formule $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ montre que la courbe d'équation $y = \cos(x)$ se déduit de la courbe d'équation $y = \sin(x)$ par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

DÉFINITION 3 : (La fonction Tangente)

Cette fonction, notée tan, est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.



PROPRIÉTÉ 3 : La fonction $\tan$ est π -périodique et impaire.

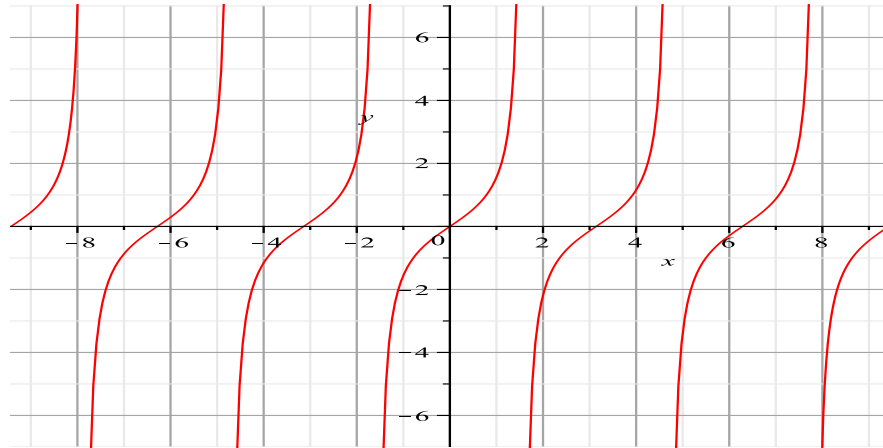
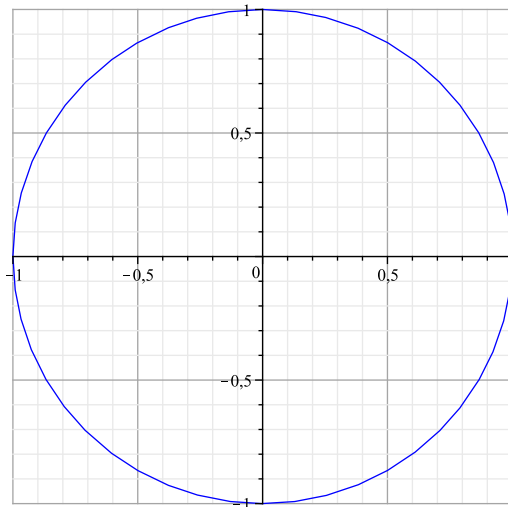


FIGURE 1.2 – Représentation de la fonction $\tan$

I.3 Formules de Trigonométrie

PROPRIÉTÉ 4 : (Relations liés au cercle trigonométrique)

$$\begin{array}{lll} \sin(-\theta) = -\sin \theta & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta & \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta & \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} & \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \end{array}$$



PROPRIÉTÉ 5 : (Valeurs remarquables)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

PROPRIÉTÉ 6 : (Résolution d'équations trigonométriques)

- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b = -a [2\pi].$
- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b = \pi - a [2\pi].$

Exercice 1.1 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\cos(3x) = 0,5$$

II Périodicité

DÉFINITION 4 : (Périodicité d'une fonction)

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite T -périodique si T est le plus petit réel positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Exercice 1.2 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \cos(\omega t)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega > 0$.

PROPRIÉTÉ 7 : (Période d'un signal sinusoïdal)

Soient A , ω et ϕ des réels non nuls.

Les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$ sont périodiques de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

REMARQUE 1 :

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ induit que $\omega T = 2\pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- Dans ce cas, on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle I de longueur T .
- La courbe représentative de f sera obtenue à partir du graphe obtenu sur I par des translations de vecteurs $kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Une fonction peut être périodique sans être une fonction trigonométrique.
En effet, la fonction $f : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor} \cdot [x - \lfloor x \rfloor]$ est périodique de période 2.

III Propriétés graphiques des fonctions

III.1 Domaine de définition

DÉFINITION 5 : On appelle **fonction** numérique d'une variable réelle toute **application** f dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels.

On note : $f : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de f .

REMARQUE 2 :

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.
- Dans le cas où la fonction n'est connue que par la donnée de son expression $f(x)$, on convient que le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.

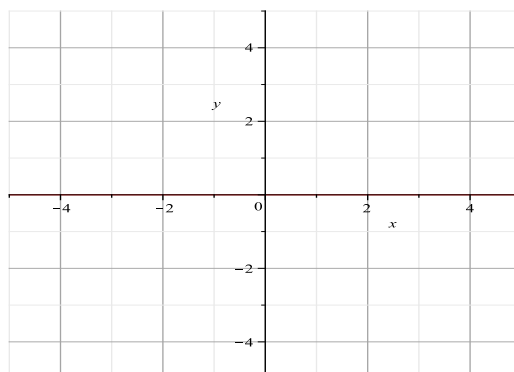
Exercice 1.3 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

III.2 Graphe d'une fonction

On se place dans un repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

DÉFINITION 6 : L'ensemble des points M de coordonnées $M(x; f(x))$ est appelé **courbe représentative** de f ou **graphe** de f .

REMARQUE 3 : La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.



III.3 Parité d'une fonction

DÉFINITION 7 : (Ensemble symétrique par rapport à 0)

Un ensemble D inclus dans $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.

DÉFINITION 8 : (Fonction paire)

Soit f une fonction dont le domaine de définition est centré en 0.

La fonction f est paire si $\forall x \in D$, on a : $f(-x) = f(x)$.

Exercice 1.4 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire.

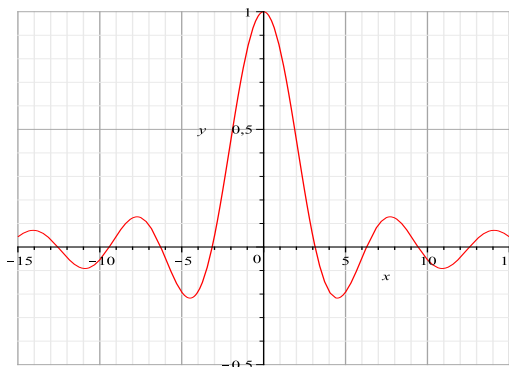


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la fonction f

REMARQUE 4 : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

DÉFINITION 9 : (Fonction impaire)

Soit f une fonction dont le domaine de définition est centré en 0.

La fonction f est impaire si $\forall x \in D$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

REMARQUE 5 :

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- Si f est une fonction impaire définie en 0 alors $f(0) = 0$.
En effet :

- Pour étudier une fonction paire ou impaire, on peut restreindre l'intervalle d'étude (en considérant, par exemple, $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$).

IV Fonction composée et applications graphiques

IV.1 Composée de fonctions

DÉFINITION 10 : Soient $u : I \rightarrow J$ et $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
On définit la composée de u par v , notée $v \circ u$, par

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

On obtient ainsi une nouvelle fonction $v \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$.

REMARQUE 6 : On a : $v \circ u : x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x))$

Exercice 1.5 On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$.
Déterminer $v \circ u$ et $u \circ v$.

IV.2 Translations de courbes

Exercice 1.6 On considère la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, définie par

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Tracer la représentation graphique des fonctions g et h définies par : $g : x \mapsto f(x) + 2$ et $h : x \mapsto f(x + 2)$.

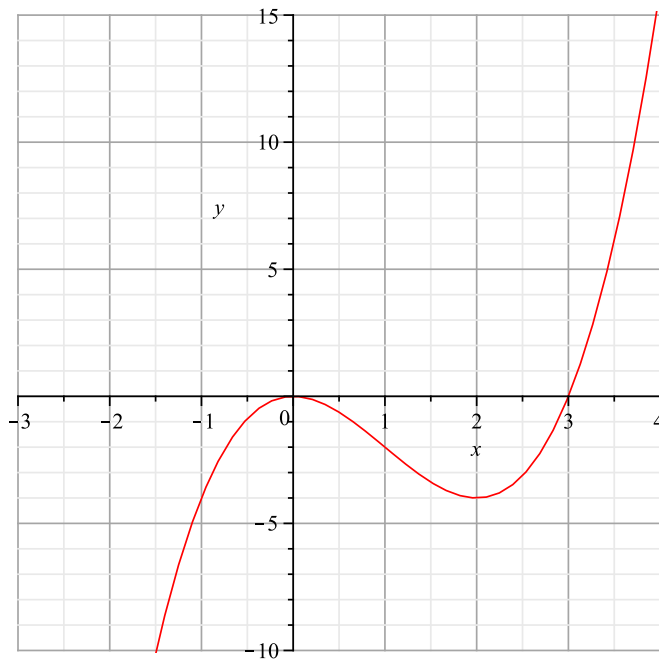


FIGURE 1.4 – Représentations graphiques des fonctions f , g et h

Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème 1 :

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $\lambda \vec{j}$.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x + \lambda)$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-\lambda \vec{i}$.

V Fonctions usuelles

V.1 Fonctions puissances et racines n -ième

PROPRIÉTÉ 8 : On appelle fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application définie sur $]0; +\infty[$ par

$$x \mapsto x^\alpha$$

DÉFINITION 11 : Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $x \geq 2$, on pose

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est appelée fonction racine n -ième.

REMARQUE 7 : La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est l'application réciproque de $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1.7 Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt[3]{27} \quad ; \quad \sqrt{3^2 + 4^2} \quad ; \quad \sqrt[5]{32}$$

V.2 La fonction logarithme népérien

PROPRIÉTÉ 9 : La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

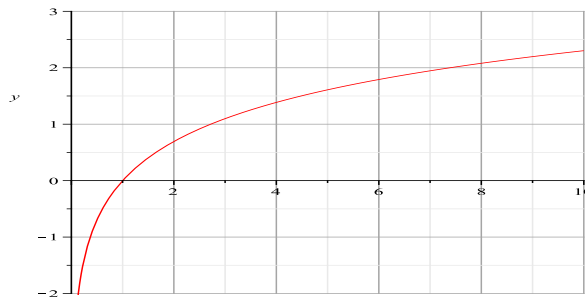


FIGURE 1.5 – Représentation graphique de la fonction $\ln$

COROLLAIRE 1 : Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$.
- $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

PROPRIÉTÉ 10 : (Propriétés algébriques de $\ln$)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall p \in \mathbb{R}, \ln(a^p) = p \ln(a)$.

V.3 Fonctions exponentielles

DÉFINITION 12 :

La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

Conséquences :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(e^x) = x$.
- $\forall y > 0$, on a : $e^{\ln y} = y$.

PROPRIÉTÉ 11 : La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE 2 : Soient a et b deux réels.

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.

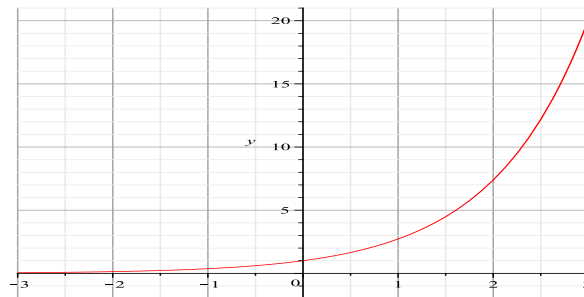


FIGURE 1.6 – Représentation graphique de la fonction $\exp$

DÉFINITION 13 : (Fonction exponentielle de base a)

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$, est définie par : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

PROPRIÉTÉ 12 : Soit a un réel strictement positif.

- Lorsque $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $a < 1$, la fonction $\exp_a$ est définie et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $a = 1$, la fonction $\exp_a$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$.

En effet :

Chapitre 2

GENERALITES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

I Forme algébrique

I.1 Généralités

DÉFINITION 1 : On définit le nombre imaginaire j tel que

$$j^2 = -1$$

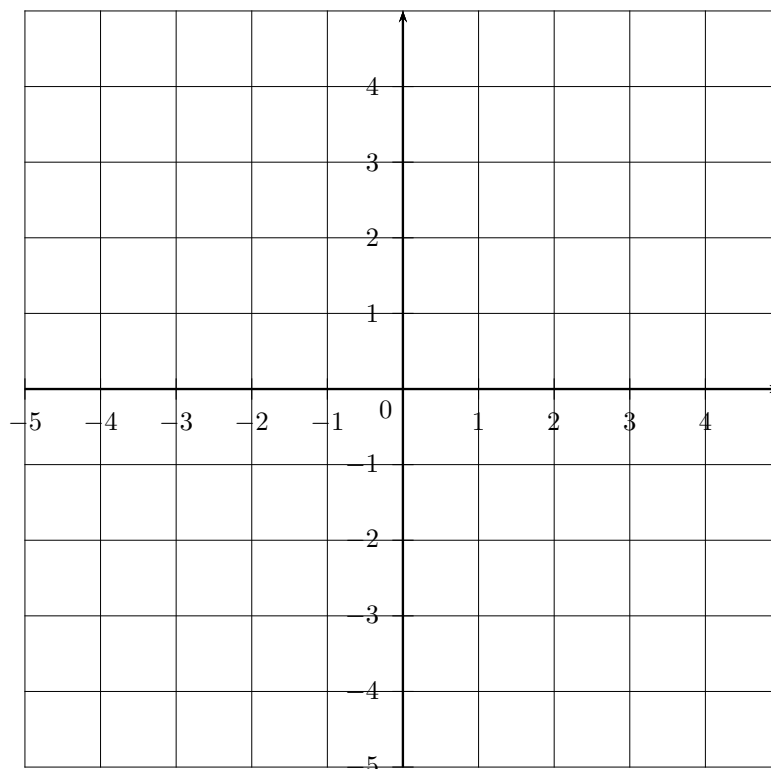
On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C} = \{a + jb, (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$a + jb$ est appelée forme algébrique du nombre complexe $z = a + jb$. Cet ensemble est muni des lois “ + ” et “ $\times$ ” telles que celles-ci prolongent les lois de $\mathbb{R}$.

À tout point M de coordonnées $(a; b)$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe le nombre complexe $a + jb$.

REMARQUE 1 : Tout réel x peut s'écrire $x = x + 0j$ ce qui induit que tout nombre réel est un nombre complexe. On note : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exercice 2.1 Placer, dans le plan complexe les nombres $A = 3$, $B = j$, $C = -j$ et $D = 2 + 2j$.



Exercice 2.2 On pose $z = -1 + 2j$. Déterminer la forme algébrique de $2z$, jz et z^2 .

DÉFINITION 2 : Soit $z = a + jb$ (a et b réels) un nombre complexe.

La partie réelle de z , notée $\operatorname{Re}(z)$, est telle que $\operatorname{Re}(z) = a$.

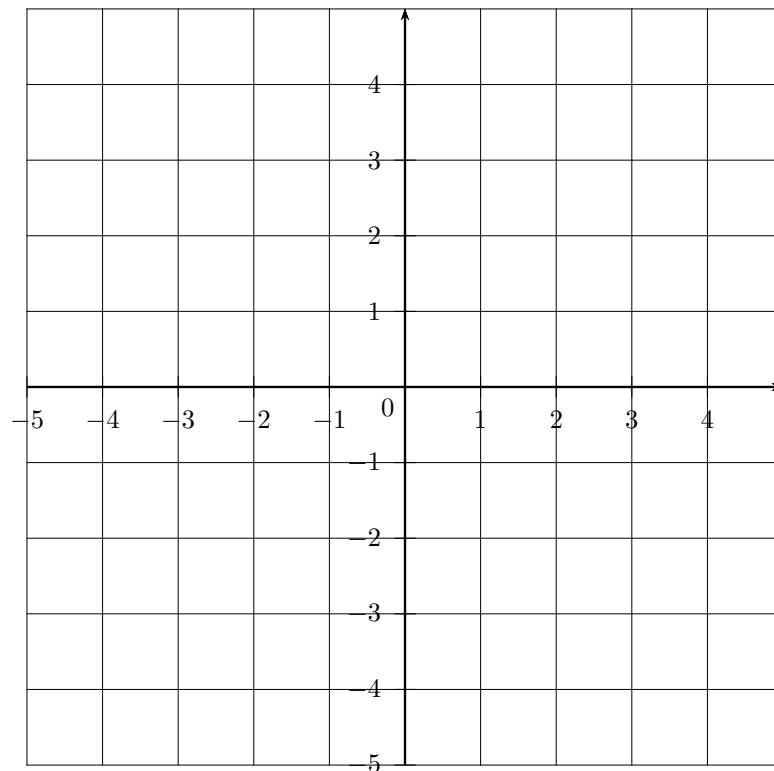
La partie imaginaire de z , notée $\operatorname{Im}(z)$ est telle que $\operatorname{Im}(z) = b$.

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.

REMARQUE 2 :

- Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont des nombres réels.
- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3 Déterminer les parties réelle et imaginaire de $D = 4$, $E = 2j$, $F = 1 + j$ et $G = (1 - j)(2 + 2j)$.



PROPRIÉTÉ 13 : (Égalité de deux nombres complexes)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Ainsi : $a + jb = a' + jb' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

I.2 Nombre complexe conjugué

DÉFINITION 3 : Le nombre complexe $\bar{z}$, conjugué de $z = a + jb$, est tel que $\bar{z} = a - jb$.

Exercice 2.4 Déterminer les parties réelle et imaginaire de $Z = \frac{1}{a + jb}$ et $Z' = \frac{2 + j}{3 - j}$.

PROPRIÉTÉ 14 :

Pour tous nombres complexes z et z' , n étant un entier, on a :

- $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{(z \times z')} = \bar{z} \times \bar{z}'$; $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ et $\bar{\bar{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.
- On a : $\begin{cases} z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \\ z - \bar{z} = 2j\text{Im}(z) \end{cases}$.

Démonstration des relations ci-dessus :

II Nombres complexes et géométrie.

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal et $M(a; b)$ un point du plan, $z = a + jb$.

On a la relation : $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

DÉFINITION 4 : z est appelé l'afixe de M (M est l'image de z). z est également l'afixe du vecteur $\vec{OM}$.

PROPRIÉTÉ 15 : (Afixe d'un vecteur)
Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .
L'afixe de $\vec{AB}$ est égale à $z_B - z_A$.

III Forme trigonométrique

III.1 Module d'un nombre complexe

DÉFINITION 5 : Soient $z = a + jb$ et M le point-image associé à z .
Le module de z est le nombre réel, noté $|z|$, tel que :

$$|z| = OM = \|\vec{OM}\|$$

PROPRIÉTÉ 16 : Soit $z = a + jb$ un nombre complexe. On a :

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $|z| \in \mathbb{R}^+$.

PROPRIÉTÉ 17 : (Inégalité triangulaire)

Pour tous nombres complexes z et z' , on a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration :

III.2 Arguments d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION 6 : Soit z un nombre complexe non nul.

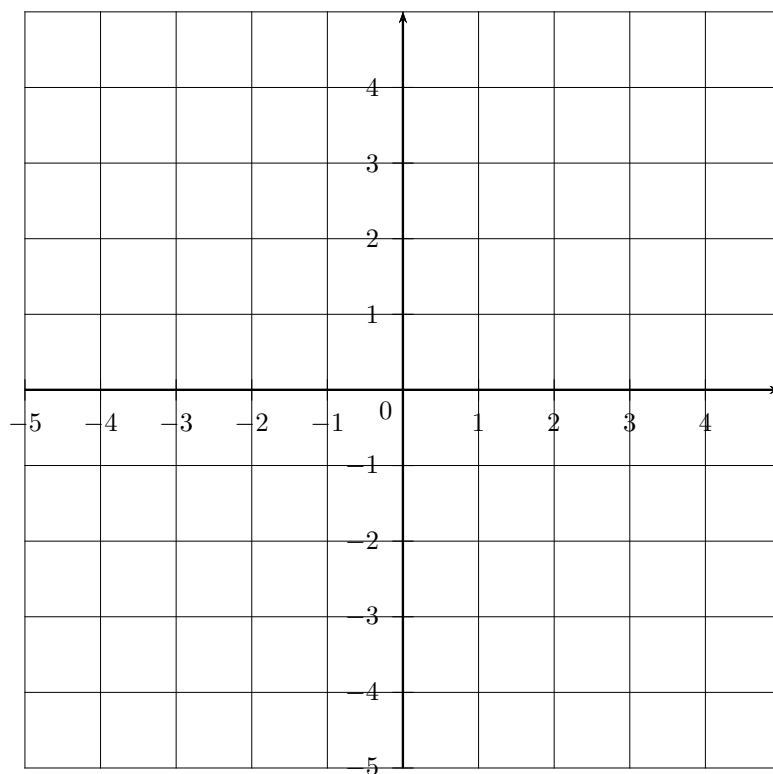
Un argument de z est le réel, noté $\arg(z)$, correspondant à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

PROPRIÉTÉ 18 : (Lien entre notation algébrique et trigonométrie)

Soit $z = a + jb$ un nombre complexe non nul avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

On a : $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$ avec $\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$ soit $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} \end{cases}$.

Exercice 2.5 Déterminer le module et un argument de $A = 2$, $B = 3j$, $C = 1 + j$ et $D = -1 + \sqrt{3}j$.



IV Forme exponentielle

IV.1 Généralités

DÉFINITION 7 : Pour tout réel θ , on note

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

REMARQUE 3 : Si z a pour argument θ alors

$$z = |z|e^{j\theta}$$

Il est à noter que la fonction exponentielle complexe a les mêmes propriétés algébriques que $\exp$.

Exercice 2.6 Écrire $2j$ et -3 sous forme exponentielle et en déduire la forme exponentielle de $-6j$.

REMARQUE 4 : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$zz' = \rho\rho'e^{j(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}e^{-j\theta} \quad ; \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}e^{j(\theta-\theta')} \quad ; \quad \bar{z} = \rho e^{-j\theta}.$$

A retenir :

- $e^{2jk\pi} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j \quad ; \quad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$
- Pour tout entier n , on a : $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}.$

IV.2 Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ 19 : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi].$
- $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi].$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi].$
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi].$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$ où n est un entier naturel.
- $z\bar{z} = |z|^2.$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ ou $\arg(z) = 0[\pi].$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi].$

Commentaires :

Exercice 2.7 Déterminer le module et un argument de $Z = j(1+j)$ en utilisant deux méthodes.

V Equations du second degré du type $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)

V.1 Racines carrées

DÉFINITION 8 : Soit Z un nombre complexe donné.
On appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

PROPRIÉTÉ 20 : (Racines carrées d'un réel)

1. Cas où Z est un réel positif ou nul :
 - (a) Cas où $Z = 0$: $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
 - (b) Cas où $Z > 0$, on a : $z^2 = Z \Leftrightarrow z = \sqrt{Z}$ ou $z = -\sqrt{Z}$.
2. Cas où Z est un réel négatif :
 $z^2 = Z \Leftrightarrow z = j\sqrt{-Z}$ ou $z = -j\sqrt{-Z}$.

REMARQUE 5 : 4 admet deux racines carrées : -2 et 2 .

La notation $\sqrt{4}$ est associée à l'unique réel positif x tel que $x^2 = 4$.

On a donc : $\sqrt{4} = 2$.

Exercice 2.8 Déterminer les racines carrées de -16 .

V.2 Équations du second degré à coefficients réels

Considérons $az^2 + bz + c$.

PROPRIÉTÉ 21 : $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ revient donc à résoudre $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Ainsi, en considérant δ une racine carrée de Δ , on a :

PROPRIÉTÉ 22 : (Résolution d'une équation du second degré)

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

On a ainsi :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions (complexes conjuguées) :
 $z_1 = \frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercice 2.9 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante

$$z^2 + z + 1 = 0$$

PROPRIÉTÉ 23 : Factorisation d'un polynôme du second degré à coefficients réels

- Si $\Delta \neq 0$ alors

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$ alors

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

Chapitre 3

LIMITES DE FONCTIONS

I Rappel sur les limites à droite et à gauche

ℓ désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

DÉFINITION 1 : Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $D_+ = D \cap]a; +\infty[$.
On dit que f est définie au voisinage à droite en a si f restreinte à D_+ est définie au voisinage de a .
L'éventuelle limite ℓ de f restreinte à D_+ en a est alors appelée limite à droite de f en a .
On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

REMARQUE 1 : Une fonction f admet une limite en a si, et seulement si, elle admet des limites à droite et gauche et que celles-ci sont égales.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

II Limites des fonctions usuelles

Théorème 1 : (Limites de la fonction logarithme Néperien)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Théorème 2 : (Limites de la fonction Exponentielle)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Théorème 3 : (Limites des fonctions exponentielles de base a où $a > 0$)

$$\begin{aligned} \text{Si } a > 1 : \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0. \\ \text{Si } 0 < a < 1 : \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty. \end{aligned}$$

En effet :

Théorème 4 : (Limites des Fonctions puissances)

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha > 0 : \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0. \\ \text{Si } \alpha < 0 : \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty. \end{aligned}$$

III Théorèmes généraux sur les limites

III.1 Limite d'une somme de deux fonctions

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f + g)$
λ_1	λ_2	$\lambda_1 + \lambda_2$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Exercice 3.1 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 + 5x - 2$.

III.2 Limite d'un produit de deux fonctions

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (fg)$
λ_1	λ_2	$\lambda_1 \times \lambda_2$
$\lambda \neq 0$	∞	∞ ⁽¹⁾
0	∞	Forme indéterminée
∞	∞	∞ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Avec le respect de la règle des signes.

III.3 Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_a f$	$\lim_a \frac{1}{f}$
$\lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
∞	0

III.4 Limite d'un quotient de deux fonctions

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a \left(\frac{f}{g}\right)$
λ_1	$\lambda_2 \neq 0$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
$\lambda_1 \neq 0$	0	∞
λ_1	∞	0
0	0	Forme indéterminée
∞	λ_2	∞
∞	∞	Forme indéterminée

Exercice 3.2 Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 3}$.

PROPRIÉTÉ 24 : (Règles opératoires sur les polynômes)

- A l'infini, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.
- A l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Ainsi, considérons la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{-x^2 + x}$.

Pour la limite en $+\infty$, on peut écrire l'enchaînement suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

III.5 Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 5 : a, k et ℓ désignent un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Soient f et g deux fonctions telles que $\text{Im}(g) \subset \mathfrak{D}_f$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$ et $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \ell$.

Exercice 3.3 Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}$.

IV Equivalents

DÉFINITION 2 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

On dit que f est équivalente à g en a , et on note $f \sim_a g$, s'il existe une fonction ε définie sur V telle que :

$$\forall x \in V, f(x) = [1 + \varepsilon(x)] g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 6 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si g est non nulle au voisinage de a , on a :

$$f \sim_a g \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 1 $x \mapsto x^2 + 6x - 7$ et $x \mapsto x^2$ sont équivalentes en $+\infty$.

REMARQUE 2 : En l'infini, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

PROPRIÉTÉ 25 :

• Si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f \sim_a h$.

• Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$.

REMARQUE 3 : Les équivalents sont conservés par produit et quotient d'après ce qui précède mais ils ne le sont **ni par sommation, ni par composition**.

En effet, considérons e^{x+1} et e^x :

Exercice 3.4 Déterminer un équivalent, en 0 et $+\infty$, de $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x^3 + x^2 - 1}$.

V Théorèmes de comparaisons

Théorème 7 : (Limite d'une fonction positive)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I du type $]a; b]$ (a et b sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$).

On suppose que f admet une limite en $x_0 \in I$.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.

REMARQUE 4 : A noter que la conclusion est identique si $f > 0$.

COROLLAIRE 3 : (Comparaison de deux fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I du type $]a; b]$ (a et b sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$). On suppose que f et g admettent une limite en $x_0 \in I$.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

REMARQUE 5 : A noter que la conclusion est identique si $f < g$.

Théorème 8 : (Théorème d'encadrement)

Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de a où a est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = k$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = k$.

Exercice 3.5 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{x+2}$.

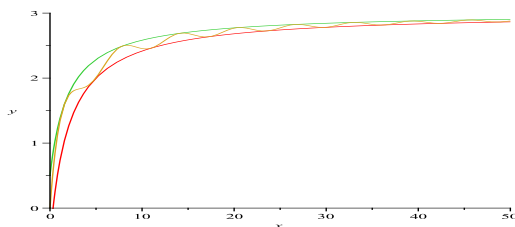


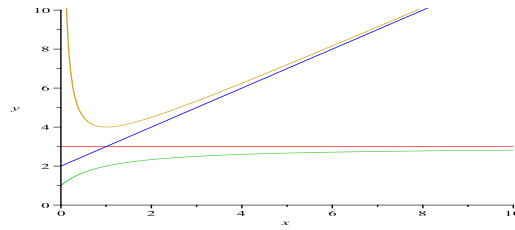
FIGURE 3.1 – illustration du théorème des "gendarmes"

VI Comportement asymptotique

Théorème 9 :

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Exercice 3.6 Démontrer l'existence d'asymptotes aux courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ et $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$.

FIGURE 3.2 – Représentation graphique des fonctions f et g

VII Croissances comparées des fonctions usuelles

Théorème 10 : (Théorème des croissances comparées)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Si $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Exercice 3.7 Montrer que la droite d'équation $y = -3x + 2$ est asymptote, au voisinage de $+\infty$, à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{-3x^2 + 2x + 5 \ln x}{x}$.

Exercice 3.8 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

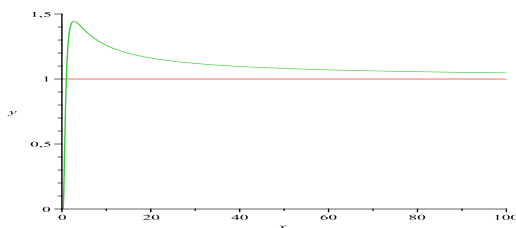


FIGURE 3.3 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

REMARQUE 6 : Rappelons la définition d'une limite finie en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x > M, \text{ on a : } |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Sur l'exemple précédent, on constate qu'on peut rendre $x^{\frac{1}{x}}$ aussi proche que l'on souhaite de 1 dès lors que x est suffisamment grand $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \right)$.

On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x > M, \text{ on a : } |x^{\frac{1}{x}} - 1| < \varepsilon$.

En prenant, par exemple, $\varepsilon = 0,1$, on a : $\exists M > 0, \forall x > M, \text{ on a : } 0,9 < x^{\frac{1}{x}} < 1,1$.

Chapitre 4

DÉRIVATION ET CONTINUITÉ

I Fonction dérivée

I.1 Généralités

DÉFINITION 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

- On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.
- Si f est dérivable en tout point de I , on peut définir sur I la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ appelée fonction dérivée de f .

REMARQUE 1 : Si f est dérivable en x_0 alors $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est voisin de $f'(x_0)$ lorsque h est voisin de 0.

REMARQUE 2 : Le nombre dérivé d'une fonction en x_0 , s'il existe, correspond à la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse x_0 .

Une équation de cette tangente est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Illustration graphique :

I.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	Dérivée $x \mapsto$	Ensemble de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty]$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty]$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

I.3 Dérivées et limites usuelles en 0

Soit f une fonction dérivable en $x_0 = 0$. On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

ce qui peut s'écrire, lorsque $f'(0)$ est non nul, $\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)$ soit

$$f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)x$$

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0)$ est non nul. On a

$$f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)x$$

COROLLAIRE 4 : $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$.

Exercice 4.1 Déterminer la limite en 0 de $\frac{e^{x^2} - 1}{2x^2}$.

I.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème 2 :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur le même ensemble D .

Les fonctions suivantes sont dérivables sur D et on a :

- $(au + bv)' = au' + bv'$ pour a et b réels quelconques.
- $(uv)' = u'v + uv'$.
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}(x)$ pour tout x tel que $v(x) \neq 0$.

Théorème 3 : (Dérivation de fonctions composées)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant x_0 et v une fonction définie sur un intervalle J contenant $y_0 = u(x_0)$.

Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en y_0 alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Exercice 4.2 Montrer que $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' .

COROLLAIRE 5 :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I (avec la condition $u(x) \neq 0$ pour $n < 0$) et on a :
 $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)' = u'e^u$.
- Si $u > 0$ sur I alors les fonctions $\sqrt{u}$ et $\ln u$ sont dérivables sur I et on a :
 $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

REMARQUE 3 : Soit n un entier naturel non nul. On a : $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \frac{u'}{u^{n+1}}$.
 En effet :

Exercice 4.3 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $g(x) = 5e^{x^2}$; $h(x) = xe^{-x}$ et $k(x) = \frac{3}{(1+2x)^5}$.

II Applications de la dérivation

II.1 Sens de variations d'une fonction

Théorème 4 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .
- Si $f' < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f' > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur I .

REMARQUE 4 : Ce théorème n'est valable que sur un intervalle.

En effet, la fonction "Inverse" est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

II.2 Extremum d'une fonction

Théorème 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors f admet un extremum en x_0 .

REMARQUE 5 : Dans ce cas, C_f admet une tangente horizontale en $M_0(x_0; f(x_0))$.

II.3 Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition
2. Eventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude).
3. Limites ou valeurs de f aux bornes des intervalles constituant D_f .
4. Dérivabilité, continuité et variations (signe de f').
5. Eventuellement :
Représentation graphique avec recherche de branches infinies, points et tangentes remarquables.

Exercice 4.4 Soit f la fonction $x \mapsto x + \sin^2 x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
Montrer que, pour tout réel x , on a : $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
2. Etablir le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$. Déterminer les points d'intersection de C_f avec les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$. Préciser les tangentes en ces points.
3. Etudier, sur $]0; \frac{\pi}{2}]$, la position de C_f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
(On posera $x = \frac{\pi}{4} + h$ et on montrera que : $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + h + \frac{1}{2} \sin(2h)$).
Tracer C_f .

III Continuité

III.1 Continuité en un point

DÉFINITION 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exercice 4.5 Etudier la continuité de $f : x \mapsto |x - 1|$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en 1.

III.2 Fonction continues usuelles

DÉFINITION 3 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
 f est dite continue sur I si f est continue en tout réel x appartenant à I .

Théorème 6 :

Les fonctions polynômes, rationnelles, exponentielles, puissances, logarithmes, trigonométriques sont continues sur leur ensemble de définition.

III.3 Propriétés

Théorème 7 : (Continuité et opérations)

Soient f et g deux fonctions continues, k étant un réel.

Les fonctions suivantes sont aussi continues en a :

$f + g$; $f \times g$; kf et $\frac{f}{g}$ (en supposant $g(a) \neq 0$).

Théorème 8 : (Continuité et composée de fonctions)

Soient f et g deux fonctions telles que $\text{Im}(f) \subset D_g$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

III.4 Prolongement par continuité

Théorème-Définition 1 :

Si f n'est pas définie en a mais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie alors on pourra définir une fonction notée

$$\hat{f} \text{ par } \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}.$$

$\hat{f}$ est continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a .

Exercice 4.6 Considérons la fonction sinus cardinal définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

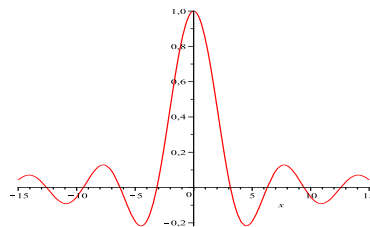


FIGURE 4.1 – Représentation de la fonction sinus cardinal

IV Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 9 : (TVI)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = u$ admet au moins une solution.

Théorème 10 : (Application aux fonctions strictement monotones)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et strictement monotone.

Pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = u$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

DÉFINITION 4 : Soit f une application de E dans F .

On dit que f est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent par f dans l'ensemble de départ E .

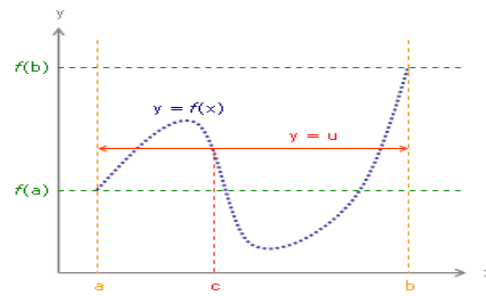
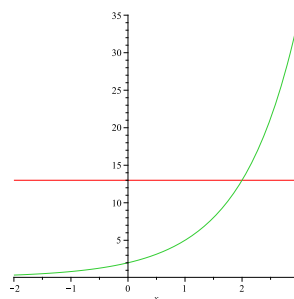


FIGURE 4.2 – Illustration du TVI

Théorème 11 : (Théorème de la bijection)

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ alors elle réalise une bijection entre $[a; b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 4.7 Montrer que l'équation $2^x + 3^x = 13$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

FIGURE 4.3 – Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2^x + 3^x$

Chapitre 5

IMPÉDANCES COMPLEXES

I Généralités

DÉFINITION 1 : (Vecteurs de Fresnel)

A la grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le vecteur (dit de Fresnel) $\vec{OM}$ tel que : $\|\vec{OM}\| = X_m$ et $(\vec{u}; \vec{OM}) = \omega t + \varphi$.

REMARQUE 1 : si $y(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi')$, l'angle $\varphi_{y/x} = (\vec{OM}; \vec{OM'}) = \varphi' - \varphi$ est appelé déphasage de y par rapport à x .

DÉFINITION 2 : (Amplitude complexe associée à une grandeur sinusoïdale)

On appelle amplitude complexe du signal $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ le nombre complexe :

$$\underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

REMARQUE 2 : On a donc : $X(t) = \text{Re}(\underline{X})$.

II Impédance complexe

On considère un dipôle passif aux bornes duquel on applique la tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$, et soit $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ le courant sinusoïdal traversant ce dipôle en régime permanent. Associons à $v(t)$ et $i(t)$ respectivement les complexes $\underline{v} = V_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.

DÉFINITION 3 : On appelle impédance complexe le nombre $\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$.

II.1 Cas d'une résistance

Théorème 1 : L'impédance associée à une résistance R est donnée par : $\underline{Z} = R$.

En effet :

II.2 Cas d'une bobine

On rappelle que : $v(t) = L \frac{di}{dt}$.

Théorème 2 : L'impédance associée à une bobine d'inductance L est donnée par : $\underline{Z} = jL\omega$.

II.3 Cas d'un condensateur

On rappelle que : $i(t) = C \frac{dv}{dt}$.

Théorème 3 : L'impédance associée à un condensateur de capacité C est donnée par : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$.

Les applications de cette partie seront développées en cours d'Electronique.

Et de terminer ce chapitre en citant Gérard Couturier, ancien Professeur d'Electronique du Département GEII de Bordeaux :

"La réalité est parfois compliquée mais jamais complexe".

Chapitre 6

CALCUL INTÉGRAL

I Intégrale de Riemann

Introduction

La notion d'intégration est essentielle en physique.

Dans cette partie, nous nous contenterons de rappeler (ou préciser) certaines notions indispensables à la bonne compréhension de notions abordées très rapidement dans d'autres disciplines. En mathématiques, ces notions seront approfondies ultérieurement.

II Généralités

DÉFINITION 1 : On appelle subdivision de l'intervalle $[a; b]$ une famille finie $\sigma = \{x_0; x_1; x_2 \dots; x_n\}$ telle que : $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Exemple 2

- $\sigma_1 = \{0; 0,5; 1\}$ et $\sigma_2 = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ sont des subdivisions de $[0; 1]$.
- $\sigma = \{a; a + \frac{b-a}{n}; a + 2\frac{b-a}{n}; \dots; b\}$ est une subdivision de $[a; b]$.

DÉFINITION 2 : (Sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

On considère un entier n non nul et la subdivision $\sigma = \{x_0; x_1; x_2 \dots; x_n\}$ avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

La somme de Riemann (la plus communément rencontrée) associée à f , notée $S_n(f)$ est définie par :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

REMARQUE 1 : Ces sommes de Riemann sont utilisées dans la méthode des rectangles pour le calcul approché des intégrales.

Théorème-Définition 2 : On dit qu'une fonction f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a; b]$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)$ existe et est finie.

Toute fonction f continue sur $[a; b]$ est intégrable et son intégrale, notée $\int_a^b f(x) dx$, est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f).$$

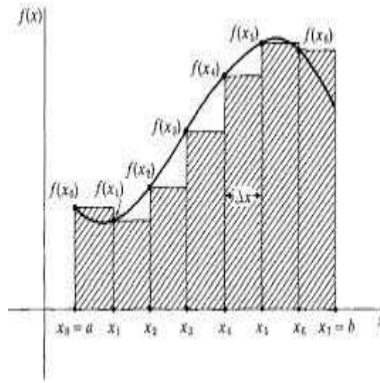


FIGURE 6.1 – Lien entre aire de rectangles et intégrale

REMARQUE 2 : Interprétation physique pour les fonctions positives

Considérons que la largeur de chaque rectangle est très petite (Δx devient dx). L'aire d'un rectangle est assimilable à $f(x) dx$. L'aire de la partie située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires de tous les rectangles.

Pour obtenir une valeur exacte, on considère qu'il y a une infinité de rectangles et que leur largeur dx est infiniment petite.

$\int_a^b f(x) dx$ va additionner toutes ces aires pour donner l'aire totale.

III Lien Intégration-Primitive

Théorème 1 : Théorème Fondamental de l'Analyse (Leibniz-Newton)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

- La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Pour toute primitive G de f , on a : $\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$.

De façon plus générale, une **primitive** de f se note parfois : $\int f(x) dx$.

De même, la **dérivée** de f peut être définie ainsi : $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ voire $f' = \frac{df}{dx}$.

Pour une fonction f de la variable x , on a donc : $df = f' dx$.

Exercice 6.1 Considérons la fonction $f : (x, t) \mapsto 2x + 3t$. On a :

$$\frac{df}{dx} = \dots ; \quad \frac{df}{dt} = \dots \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} = \dots$$

Exercice 6.2 Recherche de primitives

$$\int dx = \dots ; \quad \int x dx = \dots ; \quad \int 3C dt = \dots \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{t} = \dots \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Exercice 6.3 Détermination de différentielles

- Si $y : x \mapsto x^2$ alors $dy = \dots$
- Si y est constante alors $dy = \dots$

IV Primitives (Rappels)

DÉFINITION 3 : Soit f une fonction définie et dérivable sur I .
 F est une primitive de f sur un intervalle I si $F' = f$ sur I .

PROPRIÉTÉ 26 : Si f admet une primitive F sur I alors elle admet une infinité de primitives G sur I et les primitives de f seront de la forme $G = F + k$ où k est une constante réelle.

REMARQUE 3 : Notion d'intégrale indéfinie (sans bornes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives.

On note $\int f(x)dx$ l'ensemble de toutes les primitives de f sur cet intervalle.

Ainsi, si F est une primitive de f sur I alors : $\int f(x)dx = \{x \mapsto F(x) + k \text{ où } k \in \mathbb{R}\}$.

Par abus de langage, cette notation désigne aussi une primitive quelconque de f .

On note parfois : $\int f(t)dt = F + k$.

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

REMARQUE 4 :

- Certaines fonctions non continues admettent des primitives comme cela a été vu en début d'année avec la définition de l'intégrale de Riemann.
 C'est le cas, par exemple, des fonctions en escalier, des fonctions continues par morceaux ainsi que des fonctions bornées ayant un nombre fini (éventuellement nul) de points de discontinuité.

De ce fait, la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet des primitives.

Cette fonction n'est pas continue en 0 cependant elle admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Certaines fonctions usuelles comme $t \mapsto e^{-t^2}$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ et admettent donc des primitives mais on ne sait pas exprimer celles-ci à l'aide de fonctions usuelles.
 Dans un tel cas, il est intéressant de déterminer des valeurs approchées d'intégrales à l'aide de méthodes comme celles des rectangles, trapèzes vues en TP de Mathématiques.

En outre, certains calculs exacts demeurent possibles mais font appel, par exemple, à des intégrales doubles (cf. fonctions de plusieurs variables). Voici des résultats obtenus à l'aide de Maple :

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{erf}(2) \sqrt{\pi} \quad \text{où} \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Maple ne donne pas de résultat explicite mais fait référence à une fonction (erf) définie par intégrale ...

V Intégrales

V.1 Généralités

On rappelle que, F étant une primitive de f sur un intervalle $[a; b]$, on a : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

REMARQUE 5 : $\int_a^a f(t) dt = 0$ et $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

PROPRIÉTÉ 27 : (Propriétés de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur I , a, b, c trois réels de I et α et β deux réels quelconques.

- Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

REMARQUE 6 : Si f est définie sur les intervalles $]a_0; a_1[,]a_1; a_2[, \dots,]a_{n-1}; a_n[$ avec $a_0 = a$ et $a_n = b$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$

Exercice 6.4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$. Calculer $\int_{-2}^4 f(x)dx$.

Théorème 3 : (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On a : $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Démonstration :

COROLLAIRE 6 : (Intégration d'une inégalité)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

Si, pour tout $t \in [a; b]$, on a : $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration :

Théorème 4 : (Intégrale et moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ telle que, pour tout $x \in [a; b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$.

On a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

V.2 Utilisation de l'intégrale en GEII : Valeurs moyenne et efficace

DÉFINITION 4 :

On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur $[a, b]$ le nombre, noté $\langle f \rangle$, défini par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

En particulier, la valeur moyenne d'une fonction T -périodique f est définie par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx$$

Exercice 6.5 Déterminer la valeur moyenne du signal v défini par

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

PROPRIÉTÉ 28 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T -périodique. Pour tout réel a , on a

$$\int_0^T f(x) \, dx = \int_a^{a+T} f(x) \, dx$$

Démonstration :

DÉFINITION 5 : La valeur efficace d'une fonction T -périodique f , notée f_{eff} , est définie par

$$f_{eff}^2 = \langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) \, dx$$

Le carré de la valeur efficace correspond à la moyenne quadratique. On a donc

$$f_{eff} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

Exercice 6.6 Déterminer la valeur efficace du signal v , 3-périodique, tel que

$$v(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Chapitre 7

FONCTIONS RECIPROQUES

I Généralités

DÉFINITION 1 : Soit f une fonction bijective (continue, strictement monotone) de I dans J .
On définit sa fonction réciproque f^{-1} par $f^{-1} : \begin{cases} J \rightarrow I \\ x \mapsto f^{-1}(x) = y \end{cases}$ tel que $f(y) = x$.

$$\text{On a : } \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}.$$

REMARQUE 1 :

$\forall x \in I$, on a : $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ et $\forall y \in J$, on a : $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

REMARQUE 2 :

Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I alors $f(I) = J$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans J . Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} .

Exercice 7.1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque que l'on précisera.

Théorème 1 : (Représentation graphique d'une fonction réciproque)

La représentation graphique de la fonction réciproque d'une fonction f , dans un repère orthonormé, s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, à partir de celle de f .

Explications :

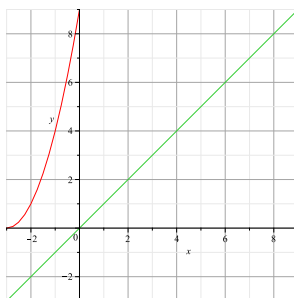


FIGURE 7.1 – Illustration graphique

Théorème 2 : (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur I .

Son application réciproque est définie, continue et de **même sens de variation** que f sur $J = f(I)$.

Si, de plus, f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur J (sauf en quelques valeurs éventuellement) et on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

REMARQUE 3 :

• Si f^{-1} est dérivable en x_0 alors $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.

• Quelques explications sur la formule de la dérivée :

On rappelle que : $(u \circ v)'(x) = v'(x).u'(v(x))$ et $(f \circ f^{-1})(x) = x$. En dérivant la seconde relation, il vient :

Exercice 7.2 Déterminer la dérivée de la fonction réciproque de $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$ en précisant le domaine de dérivabilité.

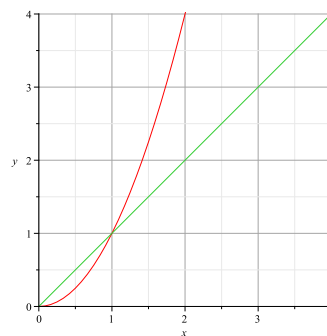
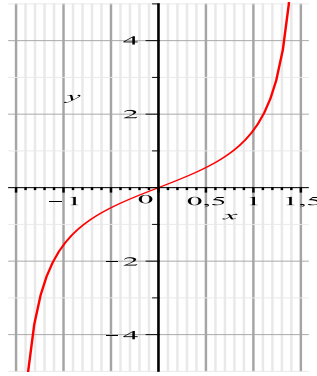


FIGURE 7.2 – Représentation graphique des fonctions "Carré" et "Racine carrée"

II Fonction réciproque en lien avec la fonction $\tan$: $\arctan$

FIGURE 7.3 – Représentation graphique de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan x$ à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. Notons que sa dérivée ($x \mapsto 1 + \tan^2 x$) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

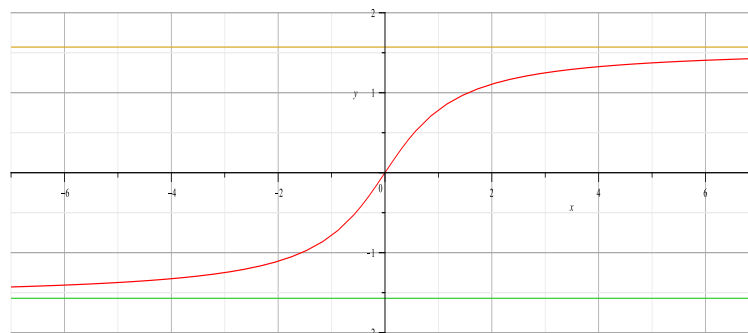
Cette fonction admet donc une fonction réciproque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème-Définition 3 :

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan x$ à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ admet une fonction réciproque, notée $\arctan$, définie sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 4 : On a : $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Le nombre $y = \arctan(x)$ est défini par les deux conditions $\begin{cases} \tan y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

FIGURE 7.4 – Représentation graphique de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$
Théorème 3 : (Dérivabilité de $\arctan$)

La fonction $x \mapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Explication de l'expression de la dérivée :

Exercice 7.3 Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(e^x)$.

PROPRIÉTÉ 29 : Soit $z = a + jb$ un nombre complexe non nul.

- Si $a > 0$ alors $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
- Si $a < 0$ alors $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$

Démonstration :

Exercice 7.4 Déterminer un argument de $z_1 = 1 + j$ et $z_2 = -1 - j$.

