Florent ARNAL

Cours Classe inversée 2

BASES DE PROBABILITÉS
Généralités et Lois usuelles discrètes

Université de Bordeaux

Adresse électronique : `florent.arnal@u-bordeaux.fr`
Site internet : http ://flarnal.e-monsite.com

Table des matières

I Généralités

Définition 1 : Une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance est appelée expérience aléatoire.
Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une issue.
L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire est appelé univers noté Ω.
Toute **partie** de l'univers est appelée un événement. Ω est appelé " événement certain " ; $\emptyset$ est appelé " événement impossible ".

Remarque 1 : Un événement qui ne contient qu'une éventualité est un évènement élémentaire.

Définition 2 : Deux événements A et B qui n'ont aucune éventualité commune sont *incompatibles* (les ensembles étant disjoints). On a donc : $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3 : Soit A un événement de l'univers Ω.
L'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A est appelé l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$.

II Probabilités d'événements

Définition 4 : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
L'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;\,1]$ est une probabilité sur Ω si :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour tous A et B tels que $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Propriété 1 : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

Propriété 2 : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω, on a :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Définition 5 : On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

Propriété 3 : Sur un univers fini, en situation d'équiprobabilité, pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{"nombre de cas favorables"}}{\text{"nombre de cas possibles"}}$$

III Conditionnement et indépendance

Définition 6 : (Probabilité conditionnelle)
Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et B un événement de probabilité non nulle.
On appelle probabilité de A sachant B le nombre, noté $\mathbb{P}_B(A)$, défini par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Propriété 4 : (Formule des probabilités totales)
Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et A, B deux événements de probabilité non nulle.
On a : $\mathbb{P}(A) = P(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)$ soit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\, P(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\, P\left(\overline{B}\right)$

Définition 7 : (Evénements indépendants)
Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire, A et B étant deux événements.
A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, P(B)$.

IV Généralités sur les variables aléatoires

Si X est une application d'un espace Ω dans $\mathbb{R}$ et si $A' \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(A')$ est le sous-ensemble de Ω, appelé image réciproque de A' par X, défini par $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A'\}$ que l'on note usuellement $[X \in A']$.
En d'autres termes, il s'agit de l'ensemble des éléments de Ω qui ont leur image par X dans A'.

Définition 8 : (Variable aléatoire réelle)
On appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a : $X^{-1}(I) \in A$.

Définition 9 : (Fonction de répartition)
On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ l'application F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

La notion de fonction de répartition est fondamentale car c'est elle que l'on utilise pour la plupart des calculs de probabilités avec R (préfixe p).

Propriété 5 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$;
2. F_X est croissante ;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

V Variables aléatoires discrètes

V.1 Généralités

Définition 10 : Une variable aléatoire discrète X est une application de $\Omega \to \mathbb{R}$ qui prend les valeurs isolées $x_1, x_2, \cdots$.

Remarque 2 : $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Définition 11 : Notons p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i pour $i = 1, 2, \cdots$.
L'affectation des p_i aux valeurs x_i permet de définir une probabilité (appelée aussi loi de probabilité) $\mathbb{P}_X$ sur $X(\Omega)$.
$\mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i)$ se note $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Remarque 3 :

1. $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.
2. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est donnée soit par la liste des probabilités (présentées dans un tableau), soit par une formule.

Propriété 6 : (Utilisation de la fonction de répartition)
Soit X une variable aléatoire discrète admettant pour fonction de répartition F_X.
Pour tout entier $a, b \in X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X < a) = F_X(a-1)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-1)$$

En effet : $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a-1) = F_X(a-1)$
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) + \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq b)$ donc $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b) - F_X(a-1)$.

V.2 Espérance et variance

Définition 12 : Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots$.
L'espérance de X est le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Remarque 4 :

- Lorsque X prend une infinité de valeurs, l'espérance d'une variable aléatoire est définie sous réserve de convergence de la série $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.
- $\mathbb{E}(X)$ est donc la **moyenne** des valeurs x_i pondérées par les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Théorème 1 : (Théorème de transfert)
Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_1, x_2, x_3 , ... et φ une fonction définie sur $\varphi(X(\Omega))$.
On a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple 1 $\mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$,
$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_i (ax_i + b) \, \mathbb{P}(X = x_i) = a \sum_i x_i \, \mathbb{P}(X = x_i) + b \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Propriété 7 : (Linéarité de l'espérance)
Soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux réels. On a :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

DÉFINITION 13 : Soit Xune variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots$.

- La variance de X est le réel, noté $\mathbb{V}(X)$, défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \sum_i [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

- L'écart-type de X est le réel, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

REMARQUE 5 : Lorsque X prend une infinité de valeurs, l'espérance d'une variable aléatoire est définie sous réserve de convergence de la série $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.

PROPRIÉTÉ 8 : (Formule de Koenig-Huygens)

$$\mathbb{V}(X) = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

En effet :
$\mathbb{V}(X) = \sum_i [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_i \left[x_i^2 + \mathbb{E}(X)^2 - 2x_i\mathbb{E}(X)\right] \mathbb{P}(X = x_i)$ soit
$\mathbb{V}(X) = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_i \mathbb{E}(X)^2 \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_i (-2x_i)\mathbb{E}(X)\mathbb{P}(X = x_i)$ donc
$\mathbb{V}(X) = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) + E(X)^2 \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) - 2\mathbb{E}(X) \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.
En utilisant $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1$ et $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$, on obtient
$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

PROPRIÉTÉ 9 : Soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux réels.

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

et

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

En effet : $\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}\left([(aX + b) - \mathbb{E}(aX + b)]^2\right) = \mathbb{E}\left([(aX + b) - (a\mathbb{E}(X) + b)]^2\right) = \mathbb{E}\left([aX - a\mathbb{E}(X)]^2\right)$. Ainsi $\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}\left(a^2[X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = a^2\mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = a^2\mathbb{V}(X)$

REMARQUE 6 : Le fait d'ajouter b à une variable X ne modifie pas la dispersion (cf. translation) ce qui se traduit par

$$\mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$$

V.3 Indépendance

DÉFINITION 14 : Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

REMARQUE 7 : Des variables mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes mais la réciproque est fausse.

Propriété 10 : Considérons un couple de variables aléatoires $(X;Y)$ admettant une espérance et une variance. On a :

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathbb{C}ov(X,Y)$$

En outre, si X et Y sont indépendantes alors

$$\mathbb{V}\left(X+Y\right)=\mathbb{V}\left(X\right)+\mathbb{V}\left(Y\right)$$

En effet : $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{E}\left([(X+Y)-\mathbb{E}(X+Y)]^2\right)=\mathbb{E}\left(([X-\mathbb{E}(X)]+[Y-\mathbb{E}(Y)])^2\right)$ soit
$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^2\right)+\mathbb{E}\left([Y-\mathbb{E}(Y)]^2\right)+2\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]\right)$.
En probabilités, la covariance de X et Y est définie par

$$\mathbb{C}ov(X,Y)=\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]\right)$$

Lorsque X et Y sont indépendantes, la covariance est nulle. La réciproque est fausse.

V.4 Lois usuelles discrètes

Définition 15 : On dit que X est distribuée selon la loi de Bernoulli de paramètre p si :

- X ne peut prendre que les valeurs 0 et 1.
- $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=q=1-p$.
  On note : $X\sim\mathcal{B}(p)$.

Propriété 11 : On suppose que $X\sim\mathcal{B}(p)$. On a :

$$\mathbb{E}\left(X\right)=p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(X\right)=p\left(1-p\right)=pq$$

Ces résultats découlent directement des définitions de l'espérance et la variance.

Définition 16 : Supposons que l'on répète n fois, dans des conditions identiques et indépendantes, une expérience aléatoire dont l'issue est :

- soit un succès (noté S) avec la probabilité p ;
- soit un échec (noté E) avec la probabilité $q=1-p$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n expériences.
On dit que X est distribuée suivant la loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque 8 :

1. X prend les valeurs de $[\![0;n]\!]$.
2. Lorsque les n tirages s'effectuent dans une population contenant un grand nombre N d'individus tel que $N>10n$ (c'est-à-dire dès que la population est 10 fois plus grande que l'échantillon), les tirages pourront être assimilés à des tirages avec remise.

Théorème 2 : X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p.

Propriété 12 : Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \forall k \in [\![0;n]\!]$$

Propriété 13 : (Espérance et variance)
Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On a :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(X\right) = np\left(1-p\right) = npq$$

En effet : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les n variables X_i sont mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

$\mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\ X_i\right) = np$ car toutes les espérances sont égales à p.

De même, $\mathbb{V}\left(X\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\ X_i\right) = np(1-p)$.