CORRECTION TEST 2 DE OML

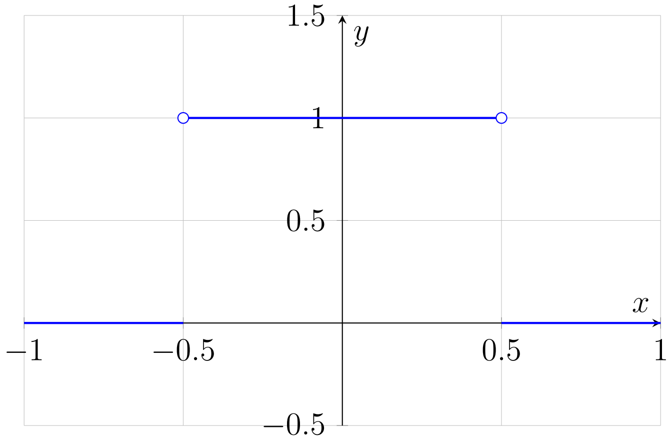
**Semestre 3** Janvier 2025

## Exercice 1 : 11 points

Soit la fonction $\Pi$ définie sur $\mathbb{R}$, paire et définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Proposer une représentation graphique de $\Pi$.



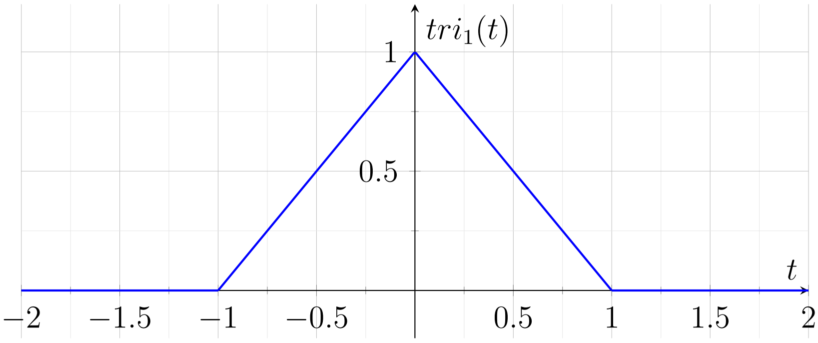

1 point

(b) Calculer la transformée de Fourier de $\Pi$, notée $\mathcal{F}\left\{\Pi\right\}(f)$, en posant $\omega = 2\pi f$, que l'on exprimera à l'aide d'un sinus cardinal.

$$\mathcal{F}\left\{\Pi\right\}(f) = 2\int_0^{1/2} \cos(wt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\omega}\sin\frac{w}{2} = \mathrm{sinc}\left(\frac{w}{2}\right) = \mathrm{sinc}(\pi f)$$

1 point

2. On considère maintenant la fonction triangle $tri_1$ représentée ci-dessous.




(a) En utilisant la définition de la transformée de Fourier et en faisant une intégration par partie, montrer que

$$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = \text{sinc}^2(\pi f)$$

$$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = 2\int_0^1 (-t+1)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = 2\left[(-t+1)\frac{\sin(wt)}{w}\right]_0^1 + \frac{2}{\omega}\int_0^1 \sin(wt)\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = \frac{-2}{w}\left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^1 = \tfrac{2}{w^2}\left[1-\cos(\omega t)\right].$$
$$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = \frac{4}{w^2}\sin^2\left(\tfrac{\omega}{2}\right) = \text{sinc}^2(\pi f)$$

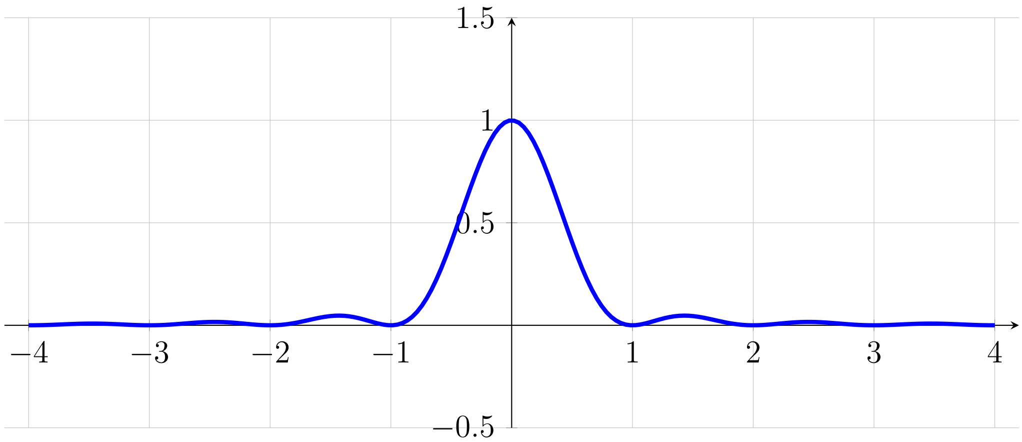
0,5 point par ligne = 2 points

(b) Donner l'expression du module et de la phase de $\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f)$.
On indiquera les fréquences $f$ pour lesquelles le module est nul.

$\mid \mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) \mid = \text{sinc}^2(\pi f)$ et $\arg(\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f)) = 0$ (lorsqu'il existe).
Le module est nul lorsque $f \in \mathbb{N}^*$.

0,5 pt pour module ; 0,25 pt pour phase et 0,25 pt pour valeurs de $f$ = 1 point

(c) Tracer le module de $\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f)$ en fonction de $f$.




1 point

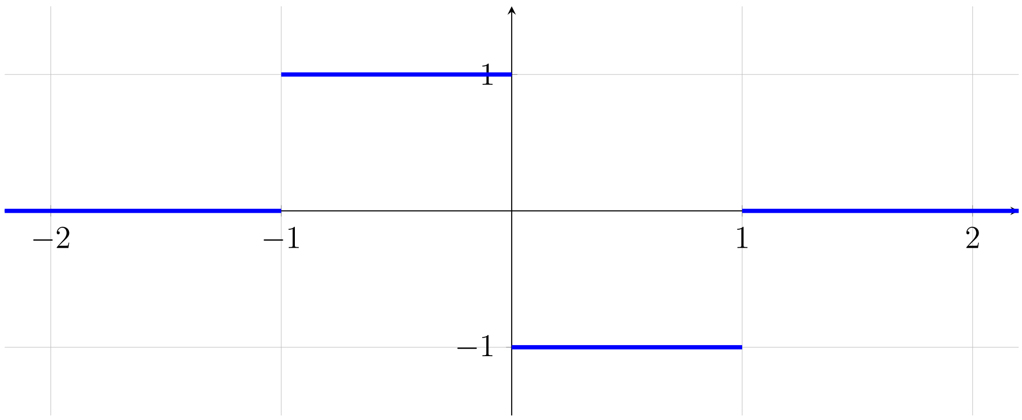
3. En admettant que $tri_1(t) = (\Pi * \Pi)(t)$, où $*$ représente l'opérateur de convolution, et en utilisant le résultat de la question 2.(a), déterminer $|\mathcal{F}\{\Pi\}(f)|$.

$\mathcal{F}\{tri_1\}(f) = \mathcal{F}\{\Pi\}(f).\mathcal{F}\{\Pi\}(f) = \mathcal{F}\{\Pi\}^2(f) = \text{sinc}^2(\pi f)$. Il en résulte que

$$|\mathcal{F}\{\Pi\}(f)| = |\text{sinc}(\pi f)|$$

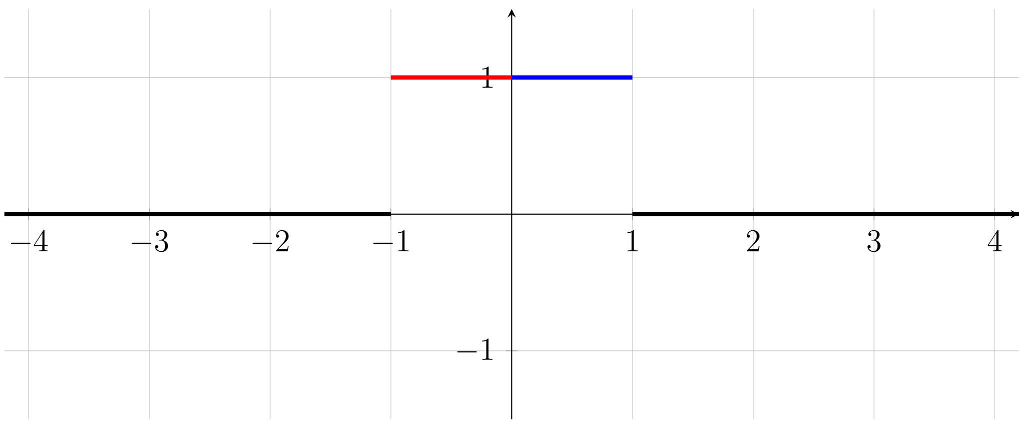
1 point

4. (a) Représenter la dérivée de la fonction $tri_1(t)$.




1 point

(b) Représenter les deux fonctions $f : t \mapsto \Pi(t - \frac{1}{2})$ et $g : t \mapsto \Pi(t + \frac{1}{2})$.




1 point

(c) Exprimer la dérivée de la fonction $tri_1(t)$ en fonction de $f(t) = \Pi(t-\frac{1}{2})$ et $g(t) = \Pi(t+\frac{1}{2})$.

Lorsqu'elle existe, la dérivée de $tri_1$ est donnée par

$$tri_1'(t) = \Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

1 point

(d) En utilisant la transformée de Fourier de $\Pi$, déterminer la transformée de Fourier de la fonction $tri_1'(t)$.

$\mathcal{F}\left\{tri_1'\right\}(f) = e^{j\frac{\omega}{2}} \text{ sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) - e^{-j\frac{\omega}{2}} \text{ sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

1 point pour la propriété du retard

(e) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $tri_1(t)$.

$\mathcal{F}\left\{tri_1'\right\}(f) = 2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$\mathcal{F}\left\{tri_1'\right\}(f) = (jw)\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f)$ donc $\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = \dfrac{1}{j\omega}\mathcal{F}\left\{tri_1'\right\}(f)$.

$\mathcal{F}\left\{tri_1\right\}(f) = \dfrac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

1 point + 0,5 point + 0,5 point = 2 points en bonus

# Exercice 2 : 4 points

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

1 point

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

1 point

3. (a) En utilisant la dérivation, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a, en dérivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

1 point

(b) Déterminer, d'après ce qui précède, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^{n-1}}$.

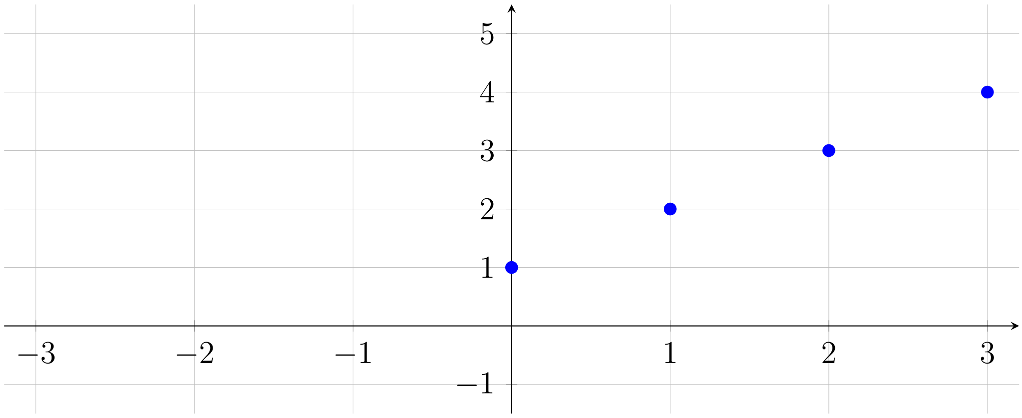
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}.$$

1 point

# Exercice 3 : 3 points

Soit la fonction échantillonnée à $T_e = 1$ définie par $f(nT_e) = nT_e + 1$.

1. Représenter la séquence $(f(nT_e)u(nT_e))$ où $u$ représente l'échelon unité (Heaviside).




1 point

2. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $f(nT_e)u(nT_e)$.

$f(nT_e)u(nT_e) = f(n)u(n) = (n+1)u(n) = nu(n) + u(n)$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, on a

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

1 point

3. Calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ de $g(nT_e)$ où

$$g(nT_e) = f(nT_e)u(nT_e - 1)$$

$g(nT_e) = f(nT_e)u(nT_e - 1) = f(n)u(n-1) = (n+1)u(n-1) = (n-1)u(n-1) + 2u(n-1)$

$$G(z) = z^{-1}\frac{z}{(z-1)^2} + 2z^{-1}\frac{z}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^2}$$

1 point

# Exercice 4 : 2 points

On considère le signal $s$ défini par

$$s(t) = 3\cos(2t) + 1$$

Proposer un code Matlab permettant d'obtenir

- la courbe de $s$, avec un quadrillage, en utilisant 1000 points, sur $[0; 3T]$ où $T$ est la période de $s$ ;
- la valeur moyenne de $s$ ;
- la valeur efficace de $s$.

On pourra utiliser :

```
% Definir la fonction f(x) = x^2
f = @(x) x.^2;
% Generer un vecteur de n points equidistants entre a et b
a = 0; % Debut de l'intervalle
b = 10; % Fin de l'intervalle
n = 100; % Nombre de points
x = linspace(a, b, n);
```

```
omega = 2;
T = 2 * pi / omega;
T
% Definir la fonction s(t)
s = @(t) 3*cos(omega*t)+1 ;
% Generer les points pour l'intervalle [0, 3T]
t = linspace(0, 3*T, 1000); % 1000 points uniformement repartis
% Tracer la courbe
figure;
plot(t, s(t), 'b-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
xlabel('Temps (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Courbe de s(t) sur [0, 3T]');
xlim([0, 3*T]);
% Calculer la valeur moyenne de s
moy = mean(s(t));
% Calculer la valeur efficace de s
eff = sqrt(mean(s(t).^2));
% Afficher les resultats
disp(['Valeur moyenne de s : ', num2str(s_mean)]);
disp(['Valeur efficace de s : ', num2str(s_rms)]);
```

0,5 point pour abscisses $t$ ; 0,5 point pour courbe

0,5 point pour la valeur moyenne et 0,5 point pour la valeur efficace

soit au total 2 points