TEST 2 DE MATHÉMATIQUES

Semestre 1 Mercredi 17 janvier 2018

Calculatrice CASIO Collège autorisée. Documents interdits. Durée : 2 heures

Il sera tenu le plus grand compte, lors de la correction de la copie, du soin apporté à la présentation et à la rédaction.

Exercice 1 : 9 points

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 4\mathrm{e}^{-x}$.
2. (a) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u(u+1)}$$

   (b) En déduire, à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

4. Pour tout entier n, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t \,\mathrm{d}t$$

   (a) Calculer I_0.

   (b) Calculer I_n où n est un entier quelconque.

Exercice 2 : 5 points

1. On considère le signal v défini, sur $\mathbb{R}$, par

$$v(t) = \sin(2\pi t)$$

   (a) Représenter le signal v et donner sa période.

(b) Déterminer, par calcul, la valeur moyenne de v.

(c) Déterminer, par calcul, la valeur efficace de v.

2. Soient K et C deux réels strictement positifs. On considère le signal f défini par

$$f(t) = Kv(t) + C$$

Exprimer la valeur moyenne de f ainsi que sa valeur efficace (en fonction de celles de v).

Exercice 3 : 6 points

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$

1. On définit la fonction G sur $]0;+\infty[$ par

$$G(\omega) = 20\log|f(\omega)|$$

(a) Montrer que, pour tout $\omega > 0$, on a

$$G(\omega) = -20\log\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$$

(b) Déterminer les limites de la fonction G en 0 et en $+\infty$.

(c) Étudier les variations de la fonction G sur $]0;+\infty[$.

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de ω a-t-on $G(\omega) = 0$?

2. (a) Montrer qu'un argument $\varphi(\omega)$ de $f(\omega)$ est défini sur $]0;+\infty[$ par

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega)$$

(b) Étudier les variations de la fonction φ sur $]0;+\infty[$.

(c) Donner l'allure de la courbe de φ.