Année universitaire 2019-2020

TD DE MATHÉMATIQUES

Module M 2302 UE 3

SEMESTRE 2

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :

$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

TD 1 : Développements limités

Capacités attendues :
• Utiliser le théorème de Rolle pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
• Déterminer un développement limité ou un équivalent d'une fonction.
• Utiliser un développement limité ou asymptotique pour calculer une limite ou déterminer une asymptote.

Autour de la dérivation

Exercice 1 : ⋆⋆

1. (a) Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ s'annule en (au moins) un réel de l'intervalle $[-1;1]$.
   (b) Tracer la courbe de f dans un repère **orthonormal**.
   En quelle.s valeur.s semble s'annuler la dérivée ?
   (c) Confirmer cette conjecture.
2. *Inégalité des accroissements finis*
   Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$ telle que, pour tout $x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq M$.
   (a) Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x non nul, on a : $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$.

Exercice 2 : ⋆⋆⋆
Soit k un entier naturel non nul.

1. Appliquer le TAF à la fonction ln sur $[k;k+1]$.
2. En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 3 : ⋆⋆⋆
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b]\,,\, g'(x) \neq 0$$

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. En considérant la fonction $h : x \mapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$, montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 4 : ⋆⋆⋆
En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle, montrer que :

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Fonctions équivalentes

Exercice 5 : ⋆⋆

1. Déterminer des équivalents polynomiaux de degré minimal au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes :
   $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$; $g : x \mapsto x\sin(x)$; $h : x \mapsto x\ln(1+3x)$.
2. À l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3a}{x^2 + a}$.

Recherche de DL

Exercice 6 : ⋆⋆

1. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto x\cos x$.
2. Déterminer le DL d'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction cosh : $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
3. Déterminer le DL d'ordre 5, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin x$.
4. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ainsi que celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 7 : ⋆⋆

1. Déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de 0, de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   En déduire le DL d'ordre 5 de arctan.
2. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $h : x \mapsto e^x \ln(1+x)$.
3. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.
4. Déterminer le DL d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$.
5. Déterminer le DL d'ordre 2, au voisinage de 3, de la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$.
6. Déterminer le DL d'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction $g : x \mapsto e^{\cos x}$.

Applications des DL

Exercice 8 : ⋆⋆

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} - \frac{1}{2x}$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x-\cos x+1}{\tan x - x}$
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Exercice 9 : ⋆⋆ Asymptotes à une courbe au voisinage de $+\infty$
En utilisant un développement asymptotique, déterminer une équation de l'asymptote à la courbe représentative des fonctions définies ci-dessous ainsi que la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = 2\sqrt{x^2+6x}$
2. $g(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

Exercice 10 : ⋆⋆ Capacité d'un condensateur cylindrique
Soient deux conducteurs cylindriques coaxiaux C_1 et C_2, de longueurs infinies et de bases circulaires, tels que C_2 enveloppe complètement C_1.
C_1 est alors l'armature interne du condensateur ainsi constitué et C_2 son armature externe.
Notons R_1 le rayon du conducteur C_1 et R_2 le rayon interne du conducteur C_2.
La capacité C d'un tronçon de longueur h de ce condensateur est

$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Montrer que, si R_2 est voisin de R_1 alors

$$C \simeq \varepsilon\frac{2\pi R_1 h}{R_2 - R_1}$$

A noter que cette formule est à rapprocher de celle de la capacité d'un condensateur plan pour lequel $C = \varepsilon\frac{S}{d}$.

Exercice 11 : ⋆⋆⋆
Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement, noté $\widehat{f}$, est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe de $\widehat{f}$ par rapport à sa tangente au point de coordonnées $(0;1)$?

Exercice 12 : ⋆⋆⋆
Former le développement asymptotique quand x tend vers $+\infty$ de $\arctan x$ à la précision $\frac{1}{x^3}$.

TD 2 : Intégrales impropres

Capacités attendues :
• Étudier la nature d'une intégrale impropre.
• Calculer une intégrale impropre convergente.

Exercice 1 : ⋆⋆
Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_3 = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 2 : ⋆⋆
Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_7 = \int_0^{+\infty} \cos t \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_8 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t \quad ; \quad I_9 = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$$

Exercice 3 : ⋆⋆

1. On considère l'intégrale
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1} \, \mathrm{d}t$$
   (a) Justifier que I est convergente.
   (b) Calculer cette intégrale.
2. On considère l'intégrale
$$J = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$
   (a) Justifier que J est convergente.
   (b) Calculer cette intégrale.
3. On considère l'intégrale
$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$
   (a) Justifier que K est convergente.
   (b) En posant $x = \sqrt{t}$, calculer cette intégrale.

Exercice 4 : ⋆ ⋆ ⋆

1. En utilisant la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$, montrer celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. La fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   (b) En déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour n entier naturel non nul.
   (c) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

(d) Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 : ⋆⋆⋆
On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g, noté $f * g$, par

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que : $f * g = g * f$.
2. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = xu(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}u(x)$.
   (a) Représenter graphiquement les fonctions $h : x \mapsto f(x-2)$ et $k : x \mapsto f(x) - f(x-2)$.
   (b) Déterminer le produit de convolution des fonctions f et g.

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Dans cet exercice, on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty;0]$.

On considère la fonction F définie par $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$, $p > 0$.

1. On considère la fonction f définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-at}$.
   Montrer que, si $a + p > 0$ alors $F(p) = \frac{1}{p+a}$.
2. On considère la fonction f définie par $f(t) = t^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
   En admettant l'existence de F, déterminer son expression.

Exercice 7 : ⋆⋆⋆
On note

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$$

1. Établir que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

2. En déduire la valeur de I.

TD 3 : Équations différentielles

Capacités attendues :
• Résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
• Résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants.
• Résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

Exercice 1 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du 1^{er} ordre suivantes :

1. $y' = y + 1$ et $y(0) = 1$
2. $xy' + y = 0$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 2 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x^2y' - y = 0$ et $y(1) = 2$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' + 2y = x + 5$
3. $xy' - 2y = x^2$ sur $]0; +\infty[$
4. $y' + 2y = 2\mathrm{e}^x$.
5. $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 3 : ⋆⋆
Résoudre, sur $]-1; +\infty[$, l'équation différentielle suivante : $(x+1)\,y' - 2y = \mathrm{e}^x\,(x+1)^3$.

Exercice 4 : ⋆⋆
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = \cos t$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Donner la solution générale de (E) sous la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + A\sin(\omega t + \varphi)$.
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 5 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y" + 4y' + 5y = 0$
2. $y" - 2y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 4$.
3. $y" - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 6 : ⋆⋆
Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y" + 4y = 10$, sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
2. $y" - 4y' + 5y = 0$.
3. $y" - 4y' + 5y = x$.
4. $y" - 4y' + 5y = x + \mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 7 : ⋆⋆⋆
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y" + 4y' + 8y = \sin x$$

Exercice 8 : $\star\star$

1. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = 0$ où R et C sont des constantes non nulles.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{qE}{m} = 0$.
   (b) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho v = mg$.
3. Intensité dans un circuit électrique
   (a) Résoudre l'équation différentielle $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$ sachant que $i\left(0\right) = 0$ (R, L et Esont des constantes non nulles).
   (b) En déduire la durée t_0 au terme de laquelle $i(t_0) = \frac{1}{2} \lim\limits_{\infty} i$.

Exercice 9 : $\star\star\star$
Déterminer les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in [0;1]\,, f'\left(x\right) + f\left(x\right) = f\left(0\right) + f\left(1\right)$$

Indication : L'équation différentielle associée est du type $y' + y = D$ ...

Exercice 10 : $\star\star\star$
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x\right) = \int\limits_0^x tf\left(t\right)\mathrm{d}t + 1$$

Indication : On peut montrer que f est dérivable et déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f ...

TD 4 : Suites

Capacités attendues :
- Déterminer la nature d'une suite et sa limite éventuelle.
- Exprimer le terme général d'une suite définie par récurrence.
- Exprimer le terme général d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique.

Calculs de limites - Études de convergence

Exercice 1 : $\star$
Étudier la convergence des suites suivantes définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = \frac{3n-2}{9n^2+2} \quad ; \quad v_n = \frac{2}{4^{n+1}} \quad ; \quad w_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} \quad ; \quad x_n = \frac{2^n+3^n}{3^n}$$

Exercice 2 : $\star\star$
Étudier la convergence des suites suivantes définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = n^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad ; \quad w_n = n\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{3n}} - 1\right)$$

Exercice 3 : $\star\star\star$
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} + \frac{1}{n.\,n\,!}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 : $\star\star\star$ [Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$]
L'objectif de cet exercice est de déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - u_n$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   Montrer que : $\ell = 2\sqrt{\ell} - \ell$ sur $[0;1]$. Conclure.

Suites géométriques et arithmétiques

Exercice 5 : $\star\star$
On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{3^{n+2}}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Quelle est la limite de (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$?

Exercice 6 : $\star\star$
On note (u_n) la suite définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$.
On note (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 2$.

1. Vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite (u_n).

Suites linéaires récurrentes d'ordre 1

Exercice 7 : ⋆⋆
Exprimer u_n en fonction de n ainsi que la limite éventuelle des suites (u_n) définies par :

(a) $5u_{n+1} - 2u_n = 6 \quad ; \quad u_0 = 7$.

(b) $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \quad ; \quad u_0 = 2$.

Exercice 8 : ⋆⋆⋆
Soient (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Pour aller plus loin

Exercice 9 : ⋆⋆⋆
Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + jy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 10 : ⋆⋆⋆
Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, l'équation $te^{-t} = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $]0;1]$ notée ρ_n.
Démontrer alors que la suite $(\rho_n)_{n\geq 3}$ converge vers 0 et prouver que : $\rho_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 11 : ⋆⋆⋆
Considérons la suite de terme général $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que, pour tout entier non nul n, $S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$.
2. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la suite (S_n) est divergente.

Exercice 12 : ⋆⋆⋆ [Intégrales de Wallis]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.
4. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
5. Déterminer un équivalent de I_n.

TD 5 : Transformées de Laplace

Capacités attendues :
- Déterminer, notamment par calcul, la transformée de Laplace d'une fonction.
- Déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fonction.
- Résoudre une équation différentielle en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice 1 : ⋆⋆
Représenter les signaux suivants ci-dessous et déterminer, par calcul, la transformée de laplace associée.

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) \quad \text{et} \quad g(t) = u(t) - u(t-2)$$

Exercice 2 : ⋆⋆
Déterminer, par calcul, la transformée de Laplace de la fonction f définie par

$$f(t) = tu(t)$$

Exercice 3 : ⋆⋆⋆
Déterminer le domaine de définition de la fonction F (d'une variable réelle) définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 4 : ⋆
Représenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
f : t \mapsto \sin(t)\, u(t) & f_1 : t \mapsto \sin(t)\, u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\
f_2 : t \mapsto u(t) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & f_3 : t \mapsto \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) u\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\
h : t \mapsto 2t\,[u(t) - u(t-1)] & h_1 : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{3} h(t-k)
\end{array}$$

Exercice 5 : ⋆⋆
Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$$\begin{array}{ll}
f(t) = [4 + 2\cos(3t)]\, u(t) & g(t) = [5 + 3\sin(3t)]\, u(t) \\
h(t) = \left(2t^3 - 1\right) u(t) & i(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right) \sin(3t)\, u(t) \\
j(t) = \left[2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right] u(t) & k(t) = u(t) - u(t-2) \\
l(t) = t\,[u(t) - u(t-2)] & m(t) = 2^{-t}\,[u(t) - u(t-2)]
\end{array}$$

Exercice 6 : ⋆⋆
Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$$f(t) = \left[te^{-3t}\right] u(t) \quad \text{et} \quad g(t) = [(2t+3)\cos(\omega t)]\, u(t)$$

Exercice 7 : ⋆⋆
Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \frac{\pi}{3} \\ 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & \text{si} \quad t \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Exercice 8 : ⋆⋆
Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle F définie par

$$F(p) = \frac{2}{p^2 - 1}$$

Exercice 9 : ⋆⋆

Déterminer la transformée de Laplace inverse des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(p) = \frac{2p+1}{p^2-4p-5} \qquad F_2(p) = \frac{p^2+1}{p^2-p}$$
$$F_3(p) = \frac{p+1}{(p+3)^2} \qquad F_4(p) = \frac{3}{(p^2+2p+3)(p-1)}$$

Exercice 10 : ⋆⋆

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y" + 4y = -6\cos(t)u(t)$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.
2. $y' + y = \cos(t)\, u(t)$
3. $x" + 2x' + 3x = 3\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

Exercice 11 : ⋆⋆

Résoudre, à l'aide de la transformée de Laplace, l'équation différentielle (E) définie sur $[0; +\infty[$ (τ, E_1 et E_2 étant des constantes)

$$(E) \quad \begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = E_2 \\ v(0) = E_1 \end{cases}$$

Exercice 12 : ⋆⋆⋆

Soit $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ avec N et D deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(N) < \deg(P)$.

On suppose, en outre, que F possède uniquement deux pôles complexes conjugués simples de la forme $\alpha = a \pm jb$.

1. Démontrer que son original est de la forme $f : t \mapsto K\mathrm{e}^{a\,t}\sin(bt + \varphi)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les pôles complexes pour que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

TD 6 : Séries numériques

Capacités attendues :
• Déterminer la nature d'une série numérique (en utilisant notamment les critères de Cauchy et d'Alembert).
• Calculer la somme d'une série numérique.

Exercice 1 : ⋆⋆
Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

$$\frac{n^2+n+1}{n^2-2n+3} \quad ; \quad \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{n} \quad ; \quad \frac{n^2+n+1}{n^4-2n+3} \quad ; \quad \frac{4n+5}{n^2+2n+8} \quad ; \quad \frac{3^n}{5^{n+1}}$$

Exercice 2 : ⋆⋆
Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

$$\frac{2^n-3}{3^{n+1}+4} \quad ; \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1 \quad ; \quad \frac{1}{n!}$$

Exercice 3 : ⋆⋆⋆
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer la limite de la suite (I_n).
2. Montrer que $I_n = I_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$.
3. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Exercice 4 : ⋆⋆

1. Montrer que la série $\sum \frac{2}{(n-1)n}$ est convergente puis calculer sa somme.
2. Calculer $\sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^n}{3^{n+1}}$ et $\sum\limits_{k\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
3. En utilisant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer les sommes suivantes :
   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{n!}$.
   (b) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 5 : Série harmonique alternée ⋆⋆⋆
Une série alternée est une série $\sum u_n$ telle que la suite de terme général $(-1)^n u_n$ soit de signe constant.
Dans cet exercice, on considère la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On introduit les suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} v_k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=1}^{2n+1} v_k$$

En utilisant les suites (a_n) et (b_n), montrer la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 6 : Règle de d'Alembert $\star\star$

L'objectif de cet exercice est de démontrer la règle de d'Alembert et de l'appliquer sur quelques exemples.

Énoncé de la règle de d'Alembert (à connaître) :

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ (la limite étant finie ou infinie).

- Si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $L = 1$ alors on ne peut conclure.

Partie 1 : Démonstration de cette règle $\star$

1. Montrer que si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $L < 1$ alors $\exists N_0 \in N,\ \forall n \geq N_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{L+1}{2}$.
   En déduire que : $\forall n \geq N_0,\ u_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-N_0} \times u_{N_0}$ puis conclure quant à la CV de $\sum u_n$.
3. Montrer, à l'aide d'exemples, qu'on ne peut conclure lorsque $L = 1$.

Partie 2 : Applications

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\ (x>0) \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}{n^n}.$$

Exercice 7 : Règle de Cauchy $\star\star$

L'objectif de cet exercice est de démontrer la règle de Cauchy et de l'appliquer sur quelques exemples.

Énoncé de la règle de Cauchy (à connaître) :

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ (la limite étant finie ou infinie).

- Si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $L = 1$ alors on ne peut conclure.

Partie 1 : Démonstration de cette règle $\star$

En utilisant des suites géométriques, démontrer les deux premiers points.

Montrer, à l'aide des séries de Riemann, qu'on ne peut conclure lorsque $L = 1$.

Partie 2 : Applications

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad ; \quad \sum \frac{n^{\ln(n)}}{[\ln(n)]^n}$$

Exercice 8 : $\star\star\star$

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{4^n} \quad ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

Pour l'étude de la dernière série, on pourra utiliser la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 9 : $\star\star\star$

Après en avoir justifié l'existence, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en utilisant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.