Année universitaire 2018-2019

TD DE MATHÉMATIQUES

Modules M 1302 UE 3

SEMESTRE 1

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :

$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

TD 1 : PROPRIÉTÉS GRAPHIQUES ET ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions de référence :
• Représenter graphiquement une fonction en lien avec les fonctions de référence.
• Représenter une fonction en utilisant des décalages et la fonction de Heaviside.
• Connaître les principales propriétés de sin et cos (notamment parité, périodicité, ...).
• Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des relations.
• Connaître les propriétés algébriques de ln et exp.
• Résoudre des (in)equations faisant intervenir des fonctions de référence.

Bases de trigonométrie

Exercice 1 : $\star$
Après avoir placé les points associés sur le cercle trigonométrique, donner le sinus et le cosinus de :
$A = \frac{7\pi}{6}$; $B = -\frac{81\pi}{4}$; $C = \frac{53\pi}{3}$.

Exercice 2 : $\star\star$
Soit x un réel appartenant à $[0; 2\pi[$. Exprimer, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 : $\star\star$
On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de :
   $\frac{4\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$.

Autour des représentations graphiques

Exercice 4 : $\star$
Représenter les fonctions sin et cos sur $[-2\pi; 2\pi]$.

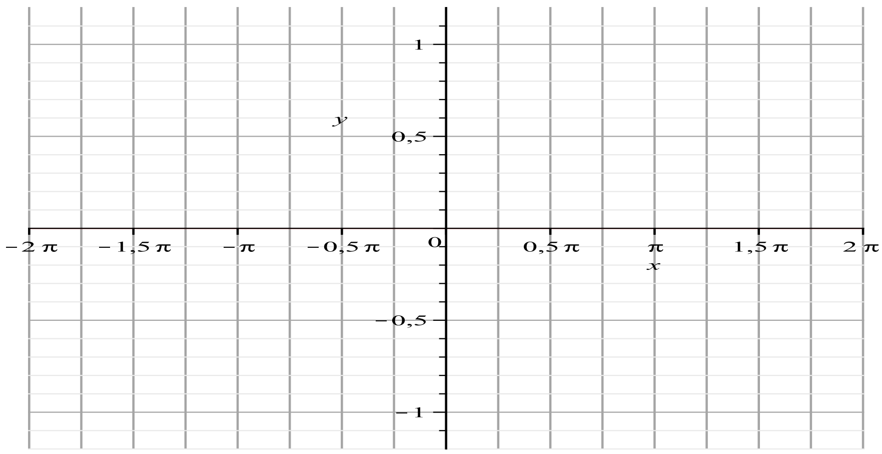


FIGURE 1 – Courbes des fonctions sin et cos.

Exercice 5 : ⋆
Les courbes ci-dessous représentent les fonctions suivantes :

$$f : t \mapsto \sin(\pi t) \qquad g : t \mapsto 3\sin(t) \qquad h : t \mapsto \sin(2t) \qquad k : t \mapsto 3\sin(2\pi t)$$

Identifier la fonction associée à chacune des courbes ci-dessous.

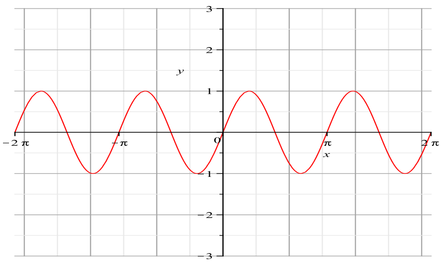


FIGURE 2 – Courbe de ······

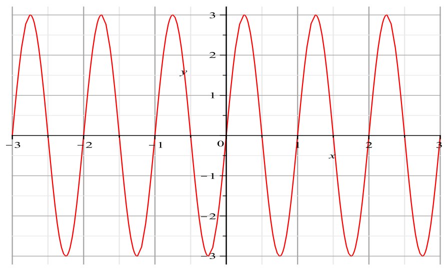


FIGURE 3 – Courbe de ······

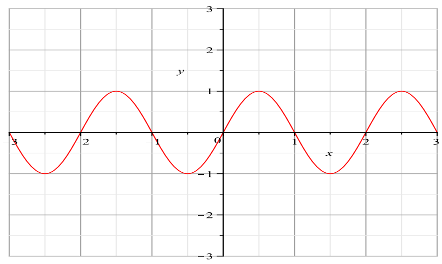


FIGURE 4 – Courbe de ······

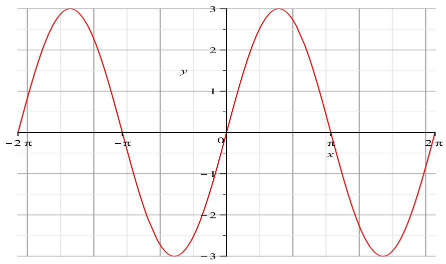


FIGURE 5 – Courbe de ······

Exercice 6 : ⋆⋆
Déduire l'allure des courbes des fonctions ci-dessous à partir des fonctions de référence $x \mapsto x^2$, cos et exp.

$$f : x \mapsto (x-2)^2 - 1 \qquad g : x \mapsto |\cos(x)| \qquad h : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$k : x \mapsto -x^2 + 2x - 2 \qquad m : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \qquad n : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}\ .$$

Exercice 7 : ⋆
Sur le graphique ci-dessous, représenter la fonction $f : t \mapsto 2\sin(t)$ et en déduire une expression de la fonction g dont la courbe est tracée sur la figure ci-dessous.

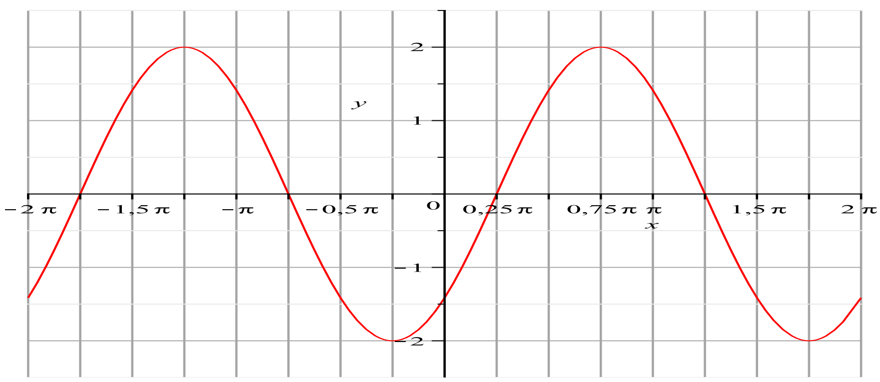


FIGURE 6 – Courbe de $g : t \mapsto$ ·········

Exercice 8 : ⋆⋆
On appelle fonction de Heaviside, la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Représenter les courbes des fonctions définies par :

$f(t) = \sin(t) \qquad g(t) = \sin(t)\,u(t) \qquad i(t) = \sin(t)u\,(t - \pi)$
$j\,(t) = \sin\,(t - \pi)\,u\,(t) \qquad k\,(t) = \sin\,(t - \pi)\,u\,(t - \pi).$

Autour des relations trigonométriques

Exercice 9 : $\star$
Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto \sin(3x+1)$ $\qquad g : t \mapsto \sin(2\pi t)$ $\qquad h : t \mapsto 5\sin(4\pi t+1)$

Exercice 10 : $\star\star$

1. Soit la fonction f définie par : $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
   Rappeler les valeurs de A, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ tels que : $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ où $A > 0$.
2. Application :
   Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 , f_3 et f_4 définies par :
   $f_1(t) = 0,5 \times \sin(2t)$ $\qquad f_2(t) = 1 + \cos(2t)$
   $f_3(t) = \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t)$ $\qquad f_4(t) = -\cos(2t) + \sin(2t)$.

Exercice 11 : $\star\star\star$
Soit la fonction f définie par : $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
Déterminer A et des conditions sur φ' pour écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi')$ où $A > 0$.

Exercice 12 : $\star\star$
Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$ (sauf indication contraire) :

- $\cos(x) = 0,5$.
- $\sin(x) = 0.5$.
- $\tan(x) = 1$.
- $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 13 : $\star\star\star$
Démontrer que si α, β et γ sont les mesures des angles d'un triangle alors :
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}.$$

Autour des propriétés algébriques de ln et exp

Exercice 14 : $\star$
On rappelle que la fonction log est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Soient a et b deux réels stricement positifs, n étant un entier naturel. Démontrer que :
   $$\log(ab) = \log a + \log b \qquad \text{et} \qquad \log(10^n) = n$$
2. Donner l'allure de la courbe de log.
3. Montrer que : $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$.
4. Résoudre les équations $\log x = 2$ et $10\log(x^2) = 60$.

Exercice 15 : $\star\star$
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(x) + \ln(2x) = \ln(3)$.
- $3 \times 2^x + 1 = 3073$.
- $\ln(x) - \ln(x-2) > 1$.
- $\mathrm{e}^{10x} - 3\mathrm{e}^{5x} + 2 = 0$.
- $\mathrm{e}^{7x} + 3\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{x} + 2 = 0$.

Autour des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Exercice 16 : $\star\star$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -2y$.
2. $y' = -2y + 6$ avec $y(0) = 0$.
3. $2y' + y = 1$.
4. $\tau\, u' + u = E$ avec $y(0) = 0$ (τ et E étant des constantes).

TD 2 : LES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues autour des nombres complexes :
• Calculer le module et un argument d'un nombre complexe.
• Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.
• Savoir linéariser une expression du type $\sin^n x$ ou $\cos^n x$.
• Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients complexes.
• Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation faisant référence aux racines n-ièmes de l'unité.

Modules et arguments

Exercice 1 : $\star$
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$A_2 = j^2$ $\quad A_3 = j^3$ $\quad A_4 = j^4$
$A = (2+3j)^2$ $\quad B = (2+3j)(2-3j)$ $\quad C = \dfrac{3+2j}{5-7j}$.

Exercice 2 : $\star$
Déterminer, en évitant certains calculs, le module et un argument des nombres complexes suivants :
$N_1 = 6$ $\quad N_2 = -5$ $\quad N_3 = j$ $\quad N_4 = -j$ $\quad N_5 = xj$ où $x \in \mathbb{R}$.
$N_6 = 1+j$ $\quad N_7 = 2+2j$ $\quad N_8 = 2-2j$ $\quad N_9 = (2-2j)^{10}$ $\quad N_{10} = \frac{2+2j}{1-j}$.

Exercice 3 : $\star$
Soit z le nombre complexe tel que

$$|z| = 5 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

Déterminer le module et un argument (sous forme de mesure principale) de :
$\overline{z}$; $z\overline{z}$; $-z$; $z+\overline{z}$; $\dfrac{1}{z}$; z^{100} ; $\dfrac{z}{\overline{z}}$.

Exercice 4 : $\star\star$
Un circuit peut être caractérisé électriquement par son impédance, grandeur complexe.
Par exemple, les impédances des circuits de base sont les suivantes :
• Résistance : $Z_R = R$
• Condensateur : $Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité (F) et ω la pulsation (rad.s^{-1})
• Bobine : $Z_L = jL\omega$ où L est l'inductance (H).
Les nombres R, L, C et ω sont des réels strictement positifs.

1. Calculer le module et un argument de nombres complexes suivants :

$$Z_R \quad ; \quad Z_C \quad ; \quad Z_L \quad ; \quad \frac{1}{Z_R + jZ_R}$$

2. On met la résistance et le condensateur en série.
   Déterminer le module de l'impédance complexe correspondante.

Exercice 5 : $\star\star$
Soient $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$.
Donner le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 6 : $\star\star$
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:
$z_1 = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$; $z_2 = e^{j\theta} + e^{3j\theta}$; $z_3 = 1 + e^{j\theta}$; $z_4 = 1 - e^{j\theta}$.

Exercice 7 : $\star\star\star$
Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:
$z = (1 + j\tan\theta)^2$ et $z' = \dfrac{\cos\theta - j\sin\theta}{\sin\theta - j\cos\theta}$.

Exercice 8 : $\star\star$
Simplifier $\left(1+j\sqrt{3}\right)^n - \left(1-j\sqrt{3}\right)^n$.

Exercice 9 : $\star\star$
Donner le module et un argument de $1-\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 10 : $\star\star$
Calculer $\left(1+j\sqrt{3}\right)^{100}$ et $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{20}$.

Linéarisations

Exercice 11 : (Linéarisations) $\star\star$
Linéariser les expressions suivantes :
- $\sin^2 x$;
- $\cos^2 x$;
- $\sin^3 x$;
- $\sin^4 x$.

Exercice 12 : $\star\star\star$
Exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ les deux expressions suivantes :
$\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.

Équations

Exercice 13 : (Équations du second degré) $\star\star$
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
$r^2+4=0$; $z^2=-8+6j$.

Exercice 14 : (Équations du second degré) $\star\star$
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
$z^2-j\sqrt{3}z+1=0$; $z^2-2jz+2-4j=0$.

Exercice 15 : $\star\star$
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
$z=(1+j)\,\bar{z}+3-2j$; $z^6=1$; $z^5-32=0$; $(z-j)^3=-1$; $z^5=16\left(1-j\sqrt{3}\right)$.

Exercice 16 : $\star\star$
On pose : $a=\mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{3}}$. Calculer $1+a+a^2$.

Exercice 17 : (Résolution d'une équation bicarrée) $\star\star\star$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^4-2X^2\cos\varphi\ +1=0$ avec $\varphi\ \in\ ]0;\pi]$.

Exercice 18 : (Construction d'un pentagone régulier) $\star\star\star$
On considère $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega+\omega^4$ est solution de l'équation $X^2+X-1=0$.
2. Exprimer $\omega+\omega^4$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et en déduire la construction d'un pentagone régulier.

TD 3 : AUTOUR DES FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions :

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier.
- Déterminer une équation de tangente à une courbe.
- Savoir calculer une limite de fonction.
- Savoir étudier une fonction.
- Utiliser des fonctions pour résoudre, notamment, des problèmes d'optimisation.

Pour bien commencer

Exercice 1 : $\star$

On considère la fonction f définie sur $[-2; 5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

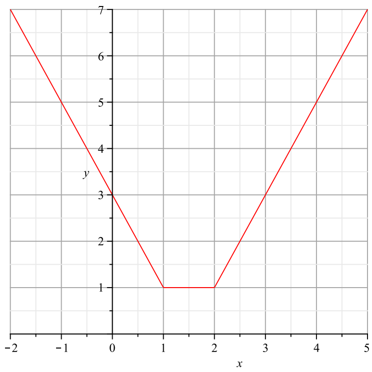


Figure 7 – Courbe de la fonction f.

1. Déterminer les réels de l'intervalle $]-2; 5[$ en lesquels la fonction f n'est pas dérivable.
2. Déterminer la dérivée de f (sur des intervalles bien choisis).
3. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction f en 3.

Exercice 2 : $\star$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

1. Représenter la fonction "Carré" et en déduire la courbe de la fonction g.
2. Déterminer graphiquement $g'(2)$ et retrouver sa valeur par calcul.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

Limites

Exercice 3 : $\star$

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 4 : $\star\star$

Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{x^2} - 1 \qquad g(x) = 5x^3\ln x + 2 \qquad h(x) = \frac{5\sin x}{x}$$

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{3x} \qquad j(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} \qquad k(x) = \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

Exercice 5 : $\star\star$
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\ln x-2}{\ln x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x^2-4x-3\right) \mathrm{e}^x \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos(2x)\right)\tan(x).$$

Exercice 6 : $\star\star$
Etudier le comportement de la fonction f définie par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 et $+\infty$.

Exercice 7 : $\star\star$
Montrer que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Dérivation, continuité et études de fonctions

Exercice 8 : $\star\star$
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$$f_1(x) = \tan(x) \qquad f_2(x) = \sqrt{2x+7} \qquad f_3(x) = \sin(3\pi x+1) \qquad f_4(x) = (x+\sin x)^4$$
$$f_5(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \qquad f_6(x) = \ln\left(x^2+2x+1\right) \qquad f_7(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} \qquad f_8(x) = \sin^3 x.$$

Exercice 9 : $\star\star$
Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = |\sin(x)|$$

Exercice 10 : $\star\star$
On considère la mesure d'une résistance électrique R.
Pour cela on réalise un circuit électrique reliant une résistance à une pile.
On mesure l'intensité I passant dans le circuit à l'aide d'un amperemètre dont l'incertitude est notée ΔI. En utilisant la relation $U = RI$, montrer que :

$$\Delta R = R\,\frac{\Delta I}{I}$$

Quelle est la valeur de R lorsque $I = 0,10$ mA, $U = 1,50$ V, $\Delta I = 0,01$ mA ?

Exercice 11 : $\star\star\star$
Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}$$

1. Déterminer le prolongement de f en une fonction $\hat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\hat{f}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 : $\star\star$
Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $\cosh : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
2. $f : x \mapsto \ln(\cosh(x))$.

Exercice 13 : $\star\star$
Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r fixée avec en série une résistance R. On rappelle que :

$$P = RI^2 \quad \text{et} \quad E = (R+r)\,I$$

Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée P soit maximale.

Exercice 14 : $\star\star$
On considère une boule de rayon R, placée dans le vide, portant une charge Q strictement positive répartie uniformément en volume.
En électrostatique, le potentiel V au point M situé à la distance x du centre de la boule est donné par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{-Qx^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + V_1 & \text{si} \quad x \leq R \\ \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} + V_2 & \text{si} \quad x > R \end{cases}$$

où les constantes ε_0 (permittivité du vide), V_1 et V_2 (constantes d'intégration) sont strictement positives.

1. Déterminer V_2 sachant que V tend vers 0 en $+\infty$.
2. V étant continue sur $\mathbb{R}^+$, déterminer V_1.
3. Donner l'allure de la courbe de V sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 15 : $\star\star$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec A et τ des constantes strictement positives.

1. Etudier les variations de f et établir son tableau de variations.
2. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_f à l'origine du repère et de l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
4. Déterminer la valeur du temps de montée permettant de passer de 10 % à 90 % de la valeur maximale de f.

TD 4 : APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues autour des applications des nombres complexes :
• Effectuer une division euclidienne ou une identification.
• Factoriser un polynôme.
• Manipuler les impédances complexes.

Polynômes

Exercice 1 : $\star\star$
Soit P le polynôme défini par
$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

1. En procédant par identification, déterminer trois réels a, b et c tels que
$$P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$
2. À l'aide d'une division euclidienne, déterminer trois réels α, β et γ tels que
$$P = (X-2)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$
3. Factoriser, en produit de polynômes irréductibles, P.

Exercice 2 : $\star$
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes suivants :
$$P(X) = 2X^2 + 8X + 6 \quad ; \quad Q(X) = -X^2 + 4X - 4 \quad ; \quad R(X) = X^2 - 2X + 2$$

Exercice 3 : $\star\star$
On considère le polynôme
$$S(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$$
Après avoir déterminé une racine (évidente), factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ce polynôme.

Exercice 4 : $\star\star$
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme
$$R(X) = X^4 - X^3 + X^2 - 11X + 10$$

Exercice 5 : $\star\star$
Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :
$A(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
$B(X) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10$.
$C(X) = 2X^4 + 2X^3 - 2X - 2$.

Exercice 6 : $\star\star\star$
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
$P(X) = X^5 - 1$
$Q(X) = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 + X + 1$
$R(X) = 2X^3 - X^2 - 2X + 6$
Indication pour la dernière factorisation : on pourra calculer $Q(1+j)$.

Exercice 7 : $\star\star\star$
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme
$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

Applications à l'électricité

Exercice 8 : ⋆⋆
On considère deux impédances équivalentes complexes Z_1 et Z_2 définies par

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

On considère la fonction de transfert H associée à un filtre fréquentiel à base d'AOP définie par

$$H(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Montrer que $H(\omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{-1}{2 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

où x est à déterminer.

Exercice 9 : ⋆⋆
On considère une association en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L.
Cet ensemble est mis en parallèle avec un condensateur de capacité C.

Aux bornes de ce circuit, on applique une tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$.
On se place en régime permanent.

1. Faire un schéma et rappeler les expressions des impédances complexes associées.
2. Donner les expressions de $\underline{Z}(\omega)$ et de son module.
3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de ω a-t-on $\underline{Z}(\omega)$ réel ?

   (b) Envisager le cas particulier où R^2C est négligeable devant L.

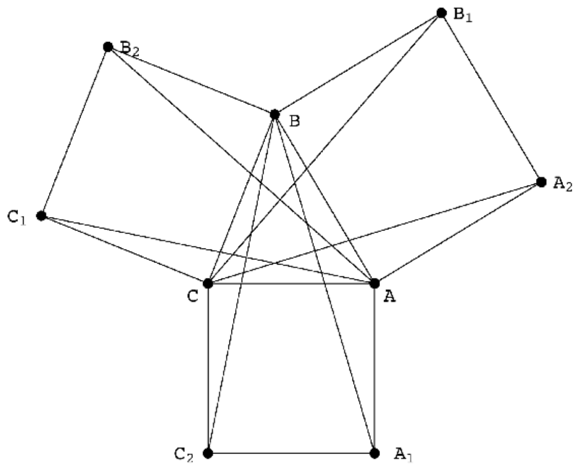
Nombre complexes et transformations du plan

Exercice 10 : (d'après concours ENSEA 2007) ⋆⋆⋆

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points quelconques non alignés A,B,C d'affixe a, b, c respectivement. Le triangle ABC est quelconque mais les sommets sont donnés dans le sens direct comme dans la figure ci-contre.
Soient les nombres complexes :

$$\begin{array}{lll} a_1 = a + (c-a)\,i & b_1 = b + (a-b)\,i & c_1 = c + (b-c)\,i \\ a_2 = a - (b-a)\,i & b_2 = b - (c-b)\,i & c_2 = c - (a-c)\,i. \end{array}$$

Les points sont donnés par leurs affixes :
$A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $C_1(c_1)$, $A_2(a_2)$, $B_2(b_2)$, $C_2(c_2)$.



1. Passe-t-on de C à A_1 par une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$?
2. Les segments $[BA_1]$ et $[CA_2]$ ont-ils toujours la même longueur ?
3. Les droites (BA_1) et (CA_2) sont-elles toujours orthogonales ?
4. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ a-t-il pour affixe $(b+c)i$?
5. A-t-on : ${A_1A_2}^2 = BA^2 + CA^2 + (a-b)\left(\overline{a}-\overline{c}\right) + (a-c)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$?

TD 5 : FONCTIONS RECIPROQUES

Capacités attendues autour des fonctions réciproques :
• Justifier l'existence d'une application réciproque.
• Déterminer des images par une application réciproque.
• Déterminer l'expression d'une application réciproque.
• Manipuler la fonction arctan.
• Déterminer une mesure d'angle à l'aide de la fonction arctan.

Généralités

Exercice 1 : $\star$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x^3 + 1$$

1. Justifier que f admet une application réciproque, notée f^{-1}.
   Préciser pour ces deux fonctions les domaines de définition et d'arrivée (espace image).
2. Déterminer, par f^{-1}, les images de 1 et 9.
3. Déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 2 : $\star\star$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

1. Étudier les variations de f. f admet-elle une application réciproque sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer la fonction réciproque correspondant à chaque intervalle de stricte monotonie de la fonction f.
3. Donner l'allure de la représentation graphique de chaque fonction réciproque.
4. Étudier la dérivabilité de ces fonctions réciproques.

Fonctions réciproques associées aux fonctions circulaires

Exercice 3 : $\star\star$
1. Déterminer les valeurs de $\tan 0$ et $\tan \frac{\pi}{4}$. En déduire les images de 0 et 1 par la fonction arctan.
2. Donner l'allure de la courbe de la fonction arctan.
3. Déterminer la dérivée de la fonction *composée* $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Donner l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 : $\star\star$
1. En utilisant la fonction arctan,déterminer un argument des nombres complexes suivants :
   $z_1 = 1 + j$; $z_2 = 2 - 2j$; $z_3 = -1 - \sqrt{3}j$ et $z_4 = -5\sqrt{3} + 5j$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. On considère la fonction f définie par : $f(t) = \sin(\omega t) + \sqrt{3}\cos(\omega t)$.
   Exprimer f sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ en définissant φ à l'aide de arctan).

Exercice 5 : $\star\star\star$
En considérant $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, montrer que : $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Exercice 6 : $\star\star\star$
Montrer que, pour tout $x \in]-1; 1]$, on a l'égalité suivante : $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos(x)$.

Fonctions réciproques associées aux fonctions hyperboliques

Exercice 7 : $\star\star\star$
On considère les fonctions cosinus et sinus hyperboliques définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Étudier les variations de ces deux fonctions et établir leurs tableaux de variations.
2. Montrer que, pour tout x réel, on a : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
3. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation : $\cosh x = 2$.
4. Justifier que la fonction argcosh, fonction réciproque de la restriction de cosh à $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]1\,;+\infty[$ est telle que :
   $\forall\, t > 1,\ (\text{argcosh})'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.
   En déduire que : $\forall t \geq 1,\ \text{argcosh}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$.

TD 6 : DÉCOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

Capacités attendues :
- Écrire la forme générale d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$.
- Calculer les coefficients d'éléments de première espèce du type $\dfrac{a}{(X-\lambda)^n}$.
- Calculer les coefficients d'éléments de seconde espèce du type $\dfrac{aX+b}{X^2+\alpha X+\beta}$ avec $\Delta < 0$.

Exercice 1 : $\star$

Dans cet exercice, aucun calcul de coefficient n'est à effectuer.
Écrire la forme générale de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :
$F(X) = \dfrac{2}{X^2+3X+2}$; $G(X) = \dfrac{2}{X^3+3X^2}$; $H(X) = \dfrac{2X^2+1}{X^2+X}$; $K(X) = \dfrac{2}{X^3+2X^2+X}$.

Exercice 2 : $\star\star$

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F(X) = \dfrac{2}{X^2+3X+2}$
- $G(X) = \dfrac{2}{X^3+3X^2}$
- $I(X) = \dfrac{X+1}{X^3+X^2-2X}$.

Exercice 3 : $\star\star$

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1(X) = \dfrac{3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X}$.
- $F_2(X) = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$.
- $F_3(X) = \dfrac{X^3+2X-1}{X(X-1)}$.
- $F_4(X) = \dfrac{X+2}{X^3-8}$.
- $F_5(X) = \dfrac{2}{X^2(X-2)}$.
- $F_6(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$.
- $F_7(X) = \dfrac{2X-1}{X^2-3X+2}$.
- $F_8(X) = \dfrac{X^4}{X^2-X-6}$.

Exercice 4 : $\star\star\star$

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F.

On peut donc écrire $Q = (X-\alpha)\widehat{Q}$ avec $\widehat{Q}(\alpha) \neq 0$ ce qui conduit à une décomposition en éléments simples de la forme :

$F = \dfrac{P}{(X-\alpha)\widehat{Q}} = G + \dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ où G est une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle.

1. Montrer que : $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{3X-4}{X^2-3X+2}$.
3. On pose $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $n \geqslant 2$.
   Réduire au même dénominateur $F = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{X-\omega_k}$.

TD 7 : INTEGRATION

Capacités attendues :
• Déterminer une primitive et calculer une intégrale.
• Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
• Calculer une intégrale en utilisant un changement de variable.
• Calculer des moyennes et valeurs efficaces de fonctions.

Généralités

Exercice 1 : ⋆
Compléter les pointillés afin de déterminer une primitive :
$\int x^2 + 3x + 1 \,\mathrm{d}x = \cdots x^3 + \cdots x^2 + \cdots$; $\int \cos(x) \times \sin^2(x) \,\mathrm{d}x = \cdots \sin^{\cdots}(x)$
$\int \frac{4x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \cdots \ln(x^2+1)$; $\int x\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \cdots \mathrm{e}^{x^2} + \cdots\cdots$

Exercice 2 : ⋆⋆
Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies par :

- $f(x) = -3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^5}$.
- $g(x) = \frac{4}{(3x+2)^4}$;
- $h(x) = 2\cos(3x)[\sin(3x)]^3$;
- $l(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \quad (x > 1)$;
- $n(x) = \tan(x)$ avec $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;
- $m(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$;
- $v(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.

Exercice 3 : ⋆⋆
En électrostatique, le potentiel V est obtenu en intégrant le champ électrique. On a

$$V(x) = -\int E(x) \,\mathrm{d}x$$

Déterminer le potentiel pour les trois champs suivants :

1. $E(x) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lx}$ (champ crée par un fil de longueur L portant une charge Q.
2. $E(x) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ (champ crée par un plan de surface S portant une charge Q.
3. $E(x) = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ (champ crée par à l'intérieur d'une boule de rayon R, portant une charge Q dans son volume.

Exercice 4 : ⋆⋆
Calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^3 \frac{1 + x\mathrm{e}^x}{x} \,\mathrm{d}x$; $\int_1^9 \frac{2}{\sqrt{x}} - 5x^2 \,\mathrm{d}x$; $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$; $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x$;

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\cos(3x) \,\mathrm{d}x$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \,\mathrm{d}x$; $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} \,\mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Exercice 5 : ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x e^{3x} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad B = \int_1^t x \ln x \, \mathrm{d}x \text{ où } t > 0 \quad ; \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(3x) \, \mathrm{d}x.$$

Valeurs moyenne et efficace

Exercice 6 : ⋆⋆

Déterminer les valeurs moyennes et efficaces des signaux périodiques représentés ci-dessous :

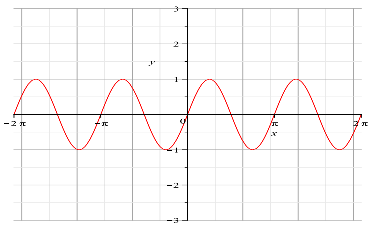


FIGURE 8 – Signal avec échelons

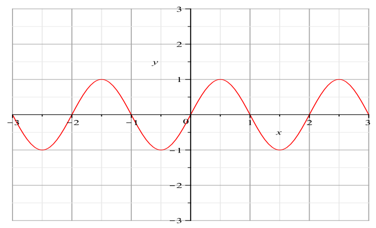


FIGURE 9 – Signal sinusoïdal redressé

Changements de variable

Exercice 7 : ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2} \text{ en posant } t = \frac{x}{3} \qquad \text{et} \qquad B = \int_1^2 (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x \text{ en posant } y = \ln x.$$

Parité et intégration

Exercice 8 : ⋆⋆

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi'(x)$ ainsi que $\phi(0)$.
   (b) Montrer que si f est paire alors $\int_{-x}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que si f est impaire alors $\int_{-x}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$.
2. Applications aux signaux périodiques
   (a) Déterminer la valeur moyenne du signal défini sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin t|$.
   (b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant
   $$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pour tout } t \in \,]0, 2\pi[\,.$$
      i. Déterminer $f(0)$.
      ii. Représenter graphiquement cette fonction.
      iii. Déterminer la valeur moyenne de f.
      iv. Déterminer la moyenne quadratique de f.

Pour aller plus loin

Exercice 9 : ⋆⋆⋆

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.
2. En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \arctan x$, la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 10 : Suites et intégrales ⋆⋆⋆
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(t)|$.

1. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t) \, \mathrm{d}t$.
2. Calculer la valeur de $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2nt) \, \mathrm{d}t$ pour tout entier n non nul.

Exercice 11 : Intégrale de Wallis ⋆⋆⋆
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n > 0$ puis que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ (en posant $x = \frac{\pi}{2} - t$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

Exercice 12 : Expression de e comme limite d'une suite ⋆⋆⋆
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.