Année universitaire 2021-2022

TD
OUTILS MATHÉMATIQUES ET LOGICIELS

SEMESTRE 1

Auteur : Florent ARNAL
Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr
Site : http://flarnal.e-monsite.com

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des $\star$ avec la signification suivante :

$\star$: exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

TD 1 : PROPRIÉTÉS GRAPHIQUES ET ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions de référence :
• Représenter graphiquement une fonction en lien avec les fonctions de référence.
• Représenter une fonction en utilisant des décalages et la fonction de Heaviside.
• Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des relations.
• Connaître les propriétés algébriques de ln et exp.
• Résoudre des (in)equations faisant intervenir des fonctions de référence.

Bases de trigonométrie

Exercice 1 : ⋆
Après avoir déterminé leur mesure principale et placé le point associé sur le cercle trigonométrique, donner le sinus et le cosinus de :

$$A = \frac{49\pi}{6} \quad ; \quad B = \frac{7\pi}{6} \quad ; \quad C = -\frac{81\pi}{4} \quad ; \quad D = \frac{53\pi}{3}$$

Exercice 2 : ⋆⋆
Cet exercice doit être effectué en utilisant le cercle trigonométrique.

1. Soit x un réel appartenant à $[0; 2\pi[$. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

$$A = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \quad B = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \quad C = \cos(x + \pi) \quad D = \sin(x + \pi)$$

2. Simplifier

$$E = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 : ⋆⋆
On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de :
$\frac{6\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$.

Autour de la parité et des relations trigonométriques

Exercice 4 : ⋆⋆
Indiquer, pour chaque fonction, si elle est paire (P), impaire (I) ou ni paire, ni impaire (NPNI).

Fonction	Parité	Fonction	Parité	Fonction	Parité
$x \mapsto x^2$		$x \mapsto x^3$		$x \mapsto 2 + 3x^2$	
$x \mapsto x - x^3$		$x \mapsto x + x^2$		$x \mapsto \frac{1}{x} + 2x$	
$x \mapsto \cos x$		$x \mapsto \cos(2x)$		$x \mapsto \sin(3x)$	
$x \mapsto x^2 + \sin(x^2)$		$x \mapsto \sin x + \cos x$		$x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4}$	

Exercice 5 : ⋆⋆
Étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto \sin(3x + 1)$; $g : t \mapsto \sin(2\pi t)$.

Exercice 6 : ⋆⋆
Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$ (sauf indication contraire) :

- $\cos(x) = 0,5$.
- $\sin(x) = 0.5$.
- $\tan(x) = 1$.

- $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos(x)\geq 0,5$ sur $[0;2\pi]$.

Autour de fonctions de référence

Exercice 7 : ⋆⋆

1. (a) Soient $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ des réels avec a_1 et a_2 non nuls.
On considère deux polynômes du second degré P_1 et P_2 définis par

$$P_1(X)=a_1X^2+b_1X+c_1 \text{ et } P_2(X)=a_2X^2+b_2X+c_2$$

En évaluant en 0, 1 et -1, montrer que

$$P_1=P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \\ c_1=c_2 \end{cases}$$

On retiendra que deux polynômes (par exemple du second degré) sont égaux si et seulement si ces polynômes ont les mêmes coefficients.

(b) On rappelle que la forme canonique d'un polynôme du second degré de la forme $P(X)=aX^2+bX+c$ s'écrit

$$P(X)=a(x+\alpha)^2+\beta$$

i. Mettre sous forme canonique les polynômes

$$P(X)=X^2-4X+3 \text{ et } Q(X)=-X^2+2X-2$$

ii. Tracer la courbe de la fonction $Carre : x\mapsto x^2$.
iii. Exprimer $P(x)$ et $Q(x)$ en utilisant la fonction $Carre$.
iv. En déduire l'allure des courbes des fonctions P et Q.

2. (a) Tracer la courbe de la fonction cos.
(b) En déduire l'allure des courbes des fonctions $x\mapsto|\cos(x)|$ et $x\mapsto\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
3. (a) Tracer la courbe de la fonction exp.
(b) En déduire l'allure des courbes des fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x\mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 8 : ⋆

On rappelle que la fonction log est définie par :

$$\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Soient a et b deux réels stricement positifs, n étant un entier naturel. Démontrer que :

$$\log(ab)=\log a+\log b \qquad \text{et} \qquad \log\left(10^n\right)=n$$

2. Donner l'allure de la courbe de log.
3. (a) Montrer que : $\log x=y\Leftrightarrow x=10^y$.
(b) En déduire la résolution des équations

$$\log x=2 \qquad \text{et} \qquad 10\log(x^2)=60$$

Exercice 9 : ⋆⋆

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(x)+\ln(2x)=\ln(3)$
- $3\times 2^x+1=3073$
- $\ln(x)-\ln(x-2)>1$
- $\mathrm{e}^{10x}-3\mathrm{e}^{5x}+2=0$
- $\mathrm{e}^{7x}+3\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^{x}+2=0$

TD 2 : LES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues autour des nombres complexes :
• Calculer le module et un argument d'un nombre complexe.
• Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.
• Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels.

Modules et arguments

Exercice 1 : ⋆
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$A = 2j^2$ $\quad B = (2j)^3$ $\quad C = (-j)^4$
$D = (1+j)^2$ $\quad E = (3+5j)(3-5j)$ $\quad F = \dfrac{3+2j}{5+7j}$.

Exercice 2 : ⋆
Déterminer, en évitant certains calculs, le module et un argument des nombres complexes suivants :
$N_1 = 6$ $\quad N_2 = -5$ $\quad N_3 = j$ $\quad N_4 = -j$ $\quad N_5 = xj$ où $x \in \mathbb{R}$.
$N_6 = 1+j$ $\quad N_7 = 2+2j$ $\quad N_8 = 2-2j$ $\quad N_9 = (2-2j)^{10}$ $\quad N_{10} = \frac{2+2j}{1-j}$.

Exercice 3 : ⋆
Placer dans le plan complexe les points d'affixe :
$z_1 = -4$, $z_2 = 3j$, $z_3 = 4$, $z_4 = 4-5j$, $z_5 = -8j$, $z_6 = -4-5j$.
Quelle figure obtient-on en reliant ces points ?
Donner les modules et arguments de z_1, z_2, z_3, z_5.

Exercice 4 : ⋆
Soit $z = 1+j$.

1. Placer le point A d'affixe z dans le plan complexe.
2. Déduire le module et un argument de z.
3. En déduire le module et un argument de $2+2j$, $2-2j$ et $(2+2j)^3$.

Exercice 5 : ⋆
Soient $z_1 = -1-j$ et $z_2 = 3+2j$.

1. Placer les points $A_1(z_1)$ et $A_2(z_2)$ dans le plan complexe
2. Calculer les modules de z_1, z_2 et z_1+z_2.
3. Comparer $|z_1+z_2|$ et $|z_1|+|z_2|$. Vérifier graphiquement ce résultat.
4. Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
5. Déterminer le module de $A = z_1 \times {z_2}^{10}$ et $B = \dfrac{{z_1}^3}{{z_2}^3}$.

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z+z'| = |z|+|z'|$.

Exercice 7 : ⋆
Déterminer le module et un argument des nombres suivants :

$$A = \sqrt{3}-j \qquad B = -1-j \qquad C = \frac{\sqrt{3}-j}{-1-j} \qquad D = \left(\frac{\sqrt{3}-j}{-1-j}\right)^3$$

Exercice 8 : ⋆
Soit un complexe z écrit sous forme exponentielle $z = \rho e^{j\theta}$.
Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\dfrac{1}{z}$, z^5 et $z+\bar{z}$.

Exercice 9 : $\star\star$
Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = -2 - j$, $z_C = -1 + 2j$.

1. Déterminer l'affixe de D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer les longueurs : AB, CB et AC.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 10 : $\star$
Soit z le nombre complexe tel que

$$|z| = 5 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

Déterminer le module et un argument (sous forme de mesure principale) de :
$\overline{z}$; $z\overline{z}$; $-z$; $z + \overline{z}$; $\dfrac{1}{z}$; z^{100} ; $\dfrac{z}{\overline{z}}$.

Exercice 11 : $\star\star$
Soient $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$.
Donner le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12 : $\star\star$
Calculer $\left(1 + j\sqrt{3}\right)^{100}$ et $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{20}$.

Équations

Exercice 13 : (Équations du second degré) $\star$
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$r^2 + 4 = 0 \quad ; \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \quad ; \quad z^2 + z = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - z + 1 = 0$$

Exercice 14 : $\star\star$
On pose : $a = \mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{3}}$. Calculer a^3 et en déduire $1 + a + a^2$.

Exercice 15 : (Résolution d'une équation bicarrée) $\star\star\star$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^4 - 2X^2\cos\varphi + 1 = 0$ avec $\varphi \in]0;\pi]$.

Exercice 16 : (Construction d'un pentagone régulier) $\star\star\star$
On considère $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega + \omega^4$ est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
2. Exprimer $\omega + \omega^4$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et en déduire la construction d'un pentagone régulier.

TD 3 : AUTOUR DES FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions :

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier.
- Déterminer une équation de tangente à une courbe.
- Calculer une limite de fonction.
- Étudier une fonction.
- Utiliser des fonctions pour résoudre, notamment, des problèmes d'optimisation.

Pour bien commencer

Exercice 1 : $\star$
On considère la fonction f définie sur $[-2;5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

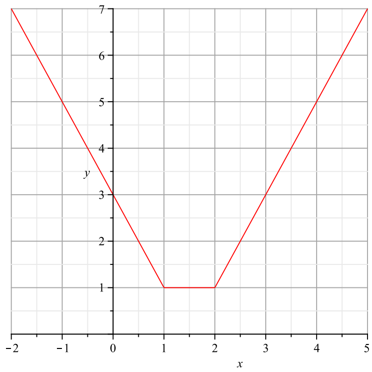


Figure 1 – Courbe de la fonction f.

1. Déterminer les réels de l'intervalle $]-2;5[$ en lesquels la fonction f n'est pas dérivable.
2. Déterminer graphiquement la dérivée de f (sur des intervalles bien choisis).
3. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction f en 3.

Exercice 2 : $\star$
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

1. Représenter la fonction "Carré" et en déduire la courbe de la fonction g.
2. Déterminer graphiquement $g'(2)$ et retrouver sa valeur par calcul.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

Limites

Exercice 3 : $\star\star$

1. Déterminer des équivalents polynomiaux de degré minimal au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes :
   $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$; $g : x \mapsto x\sin(x)$; $h : x \mapsto x\ln(1+3x)$.
2. À l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-3a}{x^2+a}$.

Exercice 4 : $\star$
Déterminer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)$

Exercice 5 : ⋆⋆ Capacité d'un condensateur cylindrique
Soient deux conducteurs cylindriques coaxiaux C_1 et C_2, de longueurs infinies et de bases circulaires, tels que C_2 enveloppe complètement C_1.
C_1 est alors l'armature interne du condensateur ainsi constitué et C_2 son armature externe.
Notons R_1 le rayon du conducteur C_1 et R_2 le rayon interne du conducteur C_2.
La capacité C d'un tronçon de longueur h de ce condensateur est

$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Montrer que, si R_2 est voisin de R_1 alors

$$C \simeq \varepsilon \frac{2\pi R_1 h}{R_2 - R_1}$$

A noter que cette formule est à rapprocher de celle de la capacité d'un condensateur plan pour lequel $C = \varepsilon \frac{S}{d}$.

Exercice 6 : ⋆⋆
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 4x - 3\right) \mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 7 : ⋆⋆⋆
Etudier le comportement de la fonction f définie par $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 et $+\infty$.

Exercice 8 : ⋆⋆⋆
Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Dérivation, continuité et études de fonctions

Exercice 9 : ⋆⋆
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x^2} & f_2(x) = \sin x & f_3(x) = \cos x & f_4(x) = \sqrt{x} \\ f_5(x) = \sin(2x) & f_6(x) = \ln(2x) & f_7(x) = \sin^2 x & f_8(x) = (x+1)^2 . \end{array}$$

Exercice 10 : ⋆⋆
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = \tan(x) & f_2(x) = \sqrt{2x+7} & f_3(x) = \sin(3\pi x + 1) & f_4(x) = (x + \sin x)^4 \\ f_5(x) = \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x} & f_6(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 1\right) & f_7(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} & f_8(x) = \sin^3 x. \end{array}$$

Exercice 11 : ⋆⋆
Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = |\sin(x)|$$

Exercice 12 : ⋆⋆⋆
Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}$$

1. Déterminer le prolongement de f en une fonction $\hat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\hat{f}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : ⋆⋆
Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $\mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
2. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$.

Exercice 14 : ⋆⋆
Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r fixée avec en série une résistance R. On rappelle que :

$$P = RI^2 \quad \text{et} \quad E = (R + r)\,I$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée P est maximale.
Pour ce faire, on réalisera un schéma électrique, on identifiera la variable puis on exprimera P en fonction de cette variable.

Exercice 15 : ⋆⋆
Cet exercice fait appel à des notions qui seront abordées au S2 en physique appliquée.
On considère une boule de rayon R, placée dans le vide, portant une charge Q strictement positive répartie uniformément en volume.
En électrostatique, le potentiel V au point M situé à la distance x du centre de la boule est donné par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{-Qx^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + V_1 & \text{si} \quad x \leq R \\ \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} + V_2 & \text{si} \quad x > R \end{cases}$$

où les constantes ε_0 (permittivité du vide), V_1 et V_2 (constantes d'intégration) sont positives.

1. Déterminer V_2 sachant que V tend vers 0 en $+\infty$.
2. V étant continue sur $\mathbb{R}^+$, déterminer V_1.
3. Donner l'allure de la courbe de V sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16 : ⋆⋆
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec A et τ des constantes strictement positives.

1. Etudier les variations de f et établir son tableau de variations.
2. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_f à l'origine du repère et de l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
4. Déterminer la valeur du temps de montée permettant de passer de 10 % à 90 % de la valeur maximale de f.

TD 4 : IMPÉDANCES COMPLEXES

Capacités attendues autour des impédances complexes :
• Calculer une impédance complexe équivalente.
• Manipuler les impédances complexes.

On rappelle que les impédances des circuits de base sont les suivantes :
• Résistance : $Z_R = R$
• Condensateur : $Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité (F) et ω la pulsation (rad.s^{-1})
• Bobine : $Z_L = jL\omega$ où L est l'inductance (H).
Les nombres R, L, C et ω sont des réels strictement positifs.

L'impédance équivalente Z_{eq} à deux impédances Z_1 et Z_2 mises :
• en série est égale à la somme des deux impédances. On a donc

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

• en parallèle est égale à l'inverse de la somme des inverses des impédances. On a donc

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

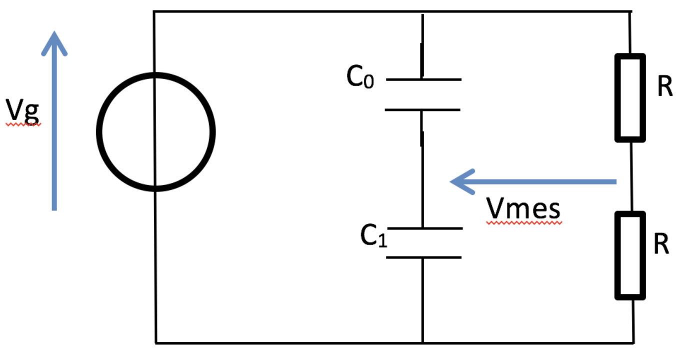
Exercice 1 : ⋆⋆

1. Calculer le module et un argument de nombres complexes suivants :

$$Z_R \quad ; \quad Z_C \quad ; \quad Z_L \quad ; \quad \frac{1}{Z_R + jZ_R}$$

2. On met la résistance et le condensateur en série.
   Déterminer le module de l'impédance complexe correspondante.

Exercice 2 : ⋆⋆
Les deux condensateurs sont montés dans un circuit en pont présenté ci-dessous.



Le générateur délivre une tension sinusoïdale d'amplitude V_g et de pulsation ω.

1. (a) En utilisant les impédances complexes Z_0 et Z_1 associées respectivement aux deux condensateurs C_0 et C_1, exprimer V_{mes} en fonction de Z_0, Z_1 et V_g.
   (b) En déduire l'expression de V_{mes} en fonction de C_0, C_1 et V_g.
2. C_1 est un condensateur variable dont la capacité varie dans l'intervalle $\left[\frac{C_0}{2}, 2C_0\right]$.
   (a) Pour quelle valeur de C_1 le pont est-il équilibré ($V_{mes} = 0$) ?
   (b) Quelles sont les valeurs de V_{mes} pour les valeurs extrêmes de C_1 si V_g=6V ?

Exercice 3 : $\star\star\star$
On considère une association en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L.
Cet ensemble est mis en parallèle avec un condensateur de capacité C.

Aux bornes de ce circuit, on applique une tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$.
On se place en régime permanent.

1. Faire un schéma et rappeler les expressions des impédances complexes associées.
2. Donner les expressions de $\underline{Z}(\omega)$ et de son module.
3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de ω a-t-on $\underline{Z}(\omega)$ réel ?
   (b) Envisager le cas particulier où R^2C est négligeable devant L.

TD 5 : INTÉGRATION

Capacités attendues :
• Déterminer une primitive et calculer une intégrale.
• Calculer des valeurs moyennes et efficaces de fsignaux.

Généralités

Exercice 1 : ⋆
Compléter les pointillés afin de déterminer une primitive :

$$\int x^2+3x+1 \, \mathrm{d}x = \cdots x^3 + \cdots x^2 + \cdots$$

$$\int \cos(x)\times\sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \cdots \sin^{\cdots}(x)$$

$$\int \frac{4x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \cdots \ln(x^2+1)$$

$$\int x\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \cdots \mathrm{e}^{x^2} + \cdots\cdots$$

Exercice 2 : ⋆⋆
Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies par :

- $f(x) = -3 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{4}{x^5}$;
- $g(x) = \dfrac{4}{(3x+2)^4}$;
- $h(x) = 2\cos(3x)[\sin(3x)]^3$;
- $l(x) = \cos(3x) + 4\sin(x) + \mathrm{e}^{-2x}$;
- $n(x) = \tan(x)$ avec $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;
- $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x+1}$ en mettant au préalable $u(x)$ sous la forme $u(x) = a + \dfrac{b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$;

Exercice 3 : ⋆⋆
En électrostatique, le potentiel V est obtenu en intégrant le champ électrique. On a

$$V(x) = -\int E(x) \, \mathrm{d}x$$

Déterminer le potentiel pour les trois champs suivants :

1. $E(x) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lx}$ (champ crée par un fil de longueur L portant une charge Q.
2. $E(x) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ (champ crée par un plan de surface S portant une charge Q.
3. $E(x) = \dfrac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ (champ crée par à l'intérieur d'une boule de rayon R, portant une charge Q dans son volume.

Exercice 4 : ⋆⋆
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}} - 5x^2 \, \mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^a \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 5 : $\star\star$

En utilisant un logiciel de calcul formel, on obtient

$$\int_2^a \ln x \quad dx = a(\ln a - 1) + 2 - \ln 4$$

1. Au vu de ce résultat, quelle fonction F semble être une primitive de ln ?
2. Vérifier votre conjecture par calcul.
3. Sur quel intervalle, F est-elle une primitive de ln ?

Valeurs moyenne et efficace

Exercice 6 : $\star\star$

1. Déterminer la valeur moyenne des signaux périodiques représentés ci-dessous :

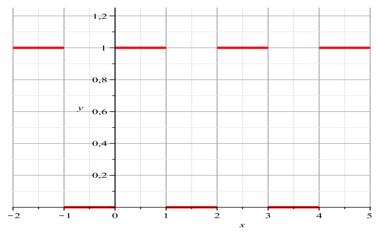


FIGURE 2 – Signal avec échelons

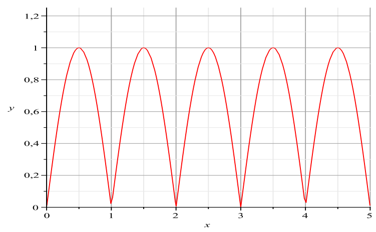


FIGURE 3 – Signal sinusoïdal redressé

2. Déterminer la valeur efficace des signaux périodiques suivants :
   • Signal 4-périodique, pair, prenant pour valeur 2 sur $[0;1]$ et 1 sur $]1;2]$.
   On pourra représenter ce signal ainsi que le carré de ce signal.
   • Signal de la figure 2.

Parité et intégration

Exercice 7 : $\star\star$

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi'(x)$ ainsi que $\phi(0)$.
   (b) Montrer que si f est paire alors $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que si f est impaire alors $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Applications aux signaux périodiques
   (a) Déterminer la valeur moyenne du signal défini sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin t|$.
   (b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pour tout } t \in \left]0, \pi\right[.$$

      i. Déterminer $f(0)$.
      ii. Représenter graphiquement cette fonction.
      iii. Déterminer la valeur moyenne de f.
      iv. Déterminer la moyenne quadratique de f.

TD 6 : FONCTIONS RÉCIPROQUES

Capacités attendues autour des fonctions réciproques :
• Justifier l'existence d'une application réciproque.
• Déterminer des images par une application réciproque.
• Déterminer l'expression d'une application réciproque.
• Manipuler la fonction arctan.
• Déterminer une mesure d'angle à l'aide de la fonction arctan.

Généralités

Exercice 1 : ⋆⋆
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x^3 + 1$$

1. Justifier que f admet une application réciproque, notée f^{-1}.
   Préciser pour ces deux fonctions les domaines de définition et d'arrivée (espace image).
2. Déterminer, par f^{-1}, les images de 1 et 9.
3. Déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 2 : ⋆⋆
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x$$

1. Étudier les variations de f. f admet-elle une application réciproque sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer la fonction réciproque correspondant à chaque intervalle de stricte monotonie de la fonction f.
3. Donner l'allure de la représentation graphique de chaque fonction réciproque.
4. Étudier la dérivabilité de ces fonctions réciproques.

Fonctions réciproques associées aux fonctions circulaires

Exercice 3 : ⋆⋆
1. Déterminer les valeurs de $\tan 0$ et $\tan \frac{\pi}{4}$. En déduire les images de 0 et 1 par la fonction arctan.
2. Donner l'allure de la courbe de la fonction arctan.
3. Déterminer la dérivée de la fonction *composée* $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Donner l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 : ⋆⋆
1. En utilisant la fonction arctan,déterminer un argument des nombres complexes suivants :
   $z_1 = 1 + j$; $z_2 = 2 - 2j$; $z_3 = -1 - \sqrt{3}j$ et $z_4 = -5\sqrt{3} + 5j$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 : ⋆⋆⋆
En considérant $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, montrer que : $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Exercice 6 : ⋆⋆⋆
Montrer que, pour tout $x \in \,]-1; 1]$, on a l'égalité suivante : $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos(x)$.