

Année universitaire 2020-2021

TD DE MATHÉMATIQUES

Modules M 1302 UE 3

SEMESTRE 1

Auteur : Florent ARNAL

Adresse électronique : florent.arnal@u-bordeaux.fr

Site : <http://flarnal.e-monsite.com>

Niveau de difficultés des exercices

Pour vous aider à vous positionner, les exercices sont repérés par des \star avec la signification suivante :

\star : exercice facile (application directe du cours, exercice de révision, ...).

$\star\star$: exercice de niveau intermédiaire mettant en jeu des compétences attendues.

$\star\star\star$: exercice proposant un prolongement ou faisant intervenir des notions difficiles (compétences non exigibles).

TD 1 : PROPRIÉTÉS GRAPHIQUES ET ALGÈBRIQUES DE FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions de référence :

- Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des relations.
- Connaître les propriétés algébriques de ln et exp.
- Résoudre des (in)equations faisant intervenir des fonctions de référence.

Bases de trigonométrie

Exercice 1 : *

1. On rappelle que la mesure principale d'un angle correspond à l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Par exemple, pour obtenir la mesure principale de $\frac{47\pi}{3}$, on commence par déterminer l'entier **pair** le plus proche de $\frac{47}{3}$. Il s'agit de 16 et on peut écrire

$$\frac{47}{3} = 16 - \frac{1}{3} \text{ soit } \frac{47\pi}{3} = 16\pi - \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{47\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

2. Après avoir déterminé leur mesure principale et placé le point associé sur le cercle trigonométrique, donner le sinus et le cosinus de :

$$A = \frac{49\pi}{6} ; \quad B = \frac{7\pi}{6} ; \quad C = -\frac{81\pi}{4} ; \quad D = \frac{53\pi}{3}$$

Exercice 2 : **

Cet exercice doit être effectué en utilisant le cercle trigonométrique.

1. Soit x un réel appartenant à $[0; 2\pi[$. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad B = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad C = \cos(x + \pi) \quad D = \sin(x + \pi)$$

2. Simplifier

$$E = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 : **

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

1. (a) Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

(b) En utilisant $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de :

$$\frac{6\pi}{5} ; \quad -\frac{\pi}{5} ; \quad \frac{4\pi}{5}.$$

Autour des relations trigonométriques

Exercice 4 : *

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin(3x + 1) \quad ; \quad g : t \mapsto \sin(2\pi t).$$

Exercice 5 : **

1. Soit la fonction f définie par : $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.
Rappeler les valeurs de A , $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ tels que : $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ où $A > 0$.
2. Application :
Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies par :
 $f_1(t) = \sin(2t)$; $f_2(t) = 1 + 0,5 \sin(2t)$; $f_3(t) = \cos(2t) + \sqrt{3} \sin(2t)$.

Exercice 6 : ***

Soit la fonction f définie par : $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.
Déterminer A et des conditions sur φ' pour écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi')$ où $A > 0$.

Exercice 7 : **

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur \mathbb{R} (sauf indication contraire) :

- $\cos(x) = 0,5$.
- $\sin(x) = 0,5$.
- $\tan(x) = 1$.
- $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 8 : ***

Démontrer que si α , β et γ sont les mesures des angles d'un triangle alors :
$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Autour des propriétés algébriques de \ln et \exp

Exercice 9 : *

On rappelle que la fonction \log est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Soient a et b deux réels strictement positifs, n étant un entier naturel. Démontrer que :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \text{et} \quad \log(10^n) = n$$

2. Donner l'allure de la courbe de \log .
3. (a) Montrer que : $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$.
(b) En déduire la résolution des équations

$$\log x = 2 \quad \text{et} \quad 10 \log(x^2) = 60$$

Exercice 10 : **

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(x) + \ln(2x) = \ln(3)$
- $3 \times 2^x + 1 = 3073$
- $\ln(x) - \ln(x-2) > 1$
- $e^{10x} - 3e^{5x} + 2 = 0$
- $e^{7x} + 3e^{5x} + e^x + 2 = 0$

TD 2 : LES NOMBRES COMPLEXES

Capacités attendues autour des nombres complexes :

- Calculer le module et un argument d'un nombre complexe.
- Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.
- Savoir linéariser une expression du type $\sin^n x$ ou $\cos^n x$.
- Résoudre dans \mathbb{C} une équation du second degré à coefficients complexes.
- Résoudre dans \mathbb{C} une équation faisant référence aux racines n -ièmes de l'unité.

Modules et arguments

Exercice 1 : *

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$A_2 = j^2 \quad A_3 = j^3 \quad A_4 = j^4$$

$$A = (2 + 3j)^2 \quad B = (2 + 3j)(2 - 3j) \quad C = \frac{3 + 2j}{5 - 7j}$$

Exercice 2 : *

Déterminer, en évitant certains calculs, le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$N_1 = 6 \quad N_2 = -5 \quad N_3 = j \quad N_4 = -j \quad N_5 = xj \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

$$N_6 = 1 + j \quad N_7 = 2 + 2j \quad N_8 = 2 - 2j \quad N_9 = (2 - 2j)^{10} \quad N_{10} = \frac{2+2j}{1-j}$$

Exercice 3 : *

Soit z le nombre complexe tel que

$$|z| = 5 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

Déterminer le module et un argument (sous forme de mesure principale) de :

$$\bar{z} \quad ; \quad z\bar{z} \quad ; \quad -z \quad ; \quad z + \bar{z} \quad ; \quad \frac{1}{z} \quad ; \quad z^{100} \quad ; \quad \frac{z}{\bar{z}}$$

Exercice 4 : **

Un circuit peut être caractérisé électriquement par son impédance, grandeur complexe.

Par exemple, les impédances des circuits de base sont les suivantes :

- Résistance : $Z_R = R$
- Condensateur : $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité (F) et ω la pulsation (rad.s^{-1})
- Bobine : $Z_L = jL\omega$ où L est l'inductance (H).

Les nombres R , L , C et ω sont des réels strictement positifs.

1. Calculer le module et un argument de nombres complexes suivants :

$$Z_R \quad ; \quad Z_C \quad ; \quad Z_L \quad ; \quad \frac{1}{Z_R + jZ_R}$$

2. On met la résistance et le condensateur en série.

Déterminer le module de l'impédance complexe correspondante.

Exercice 5 : **

Soient $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$.

Donner le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6 : **

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$z_1 = e^{j\theta} + e^{-j\theta} \quad ; \quad z_2 = e^{j\theta} + e^{3j\theta} \quad ; \quad z_3 = 1 + e^{j\theta}$$

Exercice 7 : ***

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants avec $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$z = (1 + j \tan \theta)^2 \quad \text{et} \quad z' = \frac{\cos \theta - j \sin \theta}{\sin \theta - j \cos \theta}$$

Exercice 8 : **Simplifier $(1 + j\sqrt{3})^n - (1 - j\sqrt{3})^n$.**Exercice 9 :** **Donner le module et un argument de $1 - e^{j\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.**Exercice 10 :** **Calculer $(1 + j\sqrt{3})^{100}$ et $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{1-j}\right)^{20}$.

Linéarisations

Exercice 11 : (Linéarisations) **

Linéariser les expressions suivantes :

- $\sin^2 x$;
- $\cos^2 x$;
- $\sin^3 x$;
- $\sin^4 x$.

Exercice 12 : ***Exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ les deux expressions suivantes : $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.

Équations

Exercice 13 : (Équations du second degré) **Résoudre, dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

$$r^2 + 4 = 0 \quad ; \quad z^2 - j\sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Exercice 14 : **Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$z = (1 + j)\bar{z} + 3 - 2j \quad ; \quad z^6 = 1 \quad ; \quad z^5 - 32 = 0 \quad ; \quad (z - j)^3 = -1 \quad ; \quad z^5 = 16(1 - j\sqrt{3}).$$

Exercice 15 : **On pose : $a = e^{\frac{2j\pi}{3}}$. Calculer a^3 et en déduire $1 + a + a^2$.**Exercice 16 :** (Résolution d'une équation bicarrée) ***Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $X^4 - 2X^2 \cos \varphi + 1 = 0$ avec $\varphi \in]0; \pi]$.**Exercice 17 :** (Construction d'un pentagone régulier) ***On considère $\omega = e^{\frac{2j\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega + \omega^4$ est solution de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
2. Exprimer $\omega + \omega^4$ en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et en déduire la construction d'un pentagone régulier.

TD 3 : ATOUR DES FONCTIONS

Capacités attendues autour des fonctions :

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier.
- Déterminer une équation de tangente à une courbe.
- Calculer une limite de fonction.
- Étudier une fonction.
- Utiliser des fonctions pour résoudre, notamment, des problèmes d'optimisation.

Pour bien commencer

Exercice 1 : *

On considère la fonction f définie sur $[-2; 5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

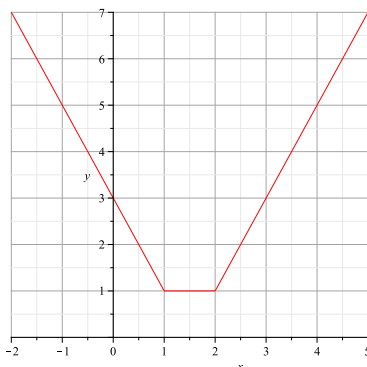


FIGURE 1 – Courbe de la fonction f .

1. Déterminer les réels de l'intervalle $]-2; 5[$ en lesquels la fonction f n'est pas dérivable.
2. Déterminer graphiquement la dérivée de f (sur des intervalles bien choisis).
3. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction f en 3.

Exercice 2 : *

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

1. Représenter la fonction "Carré" et en déduire la courbe de la fonction g .
2. Déterminer graphiquement $g'(2)$ et retrouver sa valeur par calcul.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

Limites

Exercice 3 : *

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2x + 1 = \dots \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \dots \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \dots \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = \dots$$

Exercice 4 : **

Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = \frac{3 \ln x}{x^2} - 1 \quad g(x) = 5x^3 \ln x + 2 \quad h(x) = \frac{5 \sin x}{x}$$

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{3x} \quad j(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2}$$

Exercice 5 : **

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x - 3) e^x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x)) \tan(x).$$

Exercice 6 : ***

Etudier le comportement de la fonction f définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 et $+\infty$.

Exercice 7 : **

Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Dérivation, continuité et études de fonctions

Exercice 8 : **

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = \tan(x) & f_2(x) = \sqrt{2x+7} & f_3(x) = \sin(3\pi x + 1) & f_4(x) = (x + \sin x)^4 \\ f_5(x) = (x^2 + 1)e^{-x} & f_6(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) & f_7(x) = e^{\cos(x)} & f_8(x) = \sin^3 x. \end{array}$$

Exercice 9 : **

Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = |\sin(x)|$$

Exercice 10 : ***

Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{t}$$

1. Déterminer le prolongement de f en une fonction \hat{f} continue sur \mathbb{R} .
2. \hat{f} est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

Exercice 11 : **

Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. $f : x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$.

Exercice 12 : **

Soit un générateur de force électromotrice E , de résistance interne r fixée avec en série une résistance R . On rappelle que :

$$P = RI^2 \quad \text{et} \quad E = (R + r)I$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée P est maximale.

Pour ce faire, on réalisera un schéma électrique, on identifiera la variable puis on exprimera P en fonction de cette variable.

Exercice 13 : **

On considère une boule de rayon R , placée dans le vide, portant une charge Q strictement positive répartie uniformément en volume.

En électrostatique, le potentiel V au point M situé à la distance x du centre de la boule est donné par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{-Qx^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + V_1 & \text{si } x \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} + V_2 & \text{si } x > R \end{cases}$$

où les constantes ϵ_0 (permittivité du vide), V_1 et V_2 (constantes d'intégration) sont positives.

1. Déterminer V_2 sachant que V tend vers 0 en $+\infty$.
2. V étant continue sur \mathbb{R}^+ , déterminer V_1 .
3. Donner l'allure de la courbe de V sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 14 : **

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(t) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

avec A et τ des constantes strictement positives.

1. Etudier les variations de f et établir son tableau de variations.
2. Donner l'allure de la courbe représentative de f .
3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C_f à l'origine du repère et de l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
4. Déterminer la valeur du temps de montée permettant de passer de 10 % à 90 % de la valeur maximale de f .

TD 4 : APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES**Capacités attendues autour des applications des nombres complexes :**

- Effectuer une division euclidienne ou une identification.
- Factoriser un polynôme.
- Manipuler les impédances complexes.

Polynômes

Exercice 1 : **

Soit P le polynôme défini par

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

1. En procédant par identification, déterminer trois réels a , b et c tels que

$$P = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

2. À l'aide d'une division euclidienne, déterminer trois réels α , β et γ tels que

$$P = (X - 2)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

3. Factoriser, en produit de polynômes irréductibles, P .

Exercice 2 : *

Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^2 + 8X + 6 \quad ; \quad Q(X) = -X^2 + 4X - 4 \quad ; \quad R(X) = X^2 - 2X + 2$$

Exercice 3 : **

On considère le polynôme

$$S(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$$

Après avoir déterminé une racine (évidente), factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ce polynôme.

Exercice 4 : **

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$R(X) = X^4 - X^3 + X^2 - 11X + 10$$

Exercice 5 : **

Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

$$A(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1.$$

$$B(X) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10.$$

$$C(X) = 2X^4 + 2X^3 - 2X - 2.$$

Exercice 6 : ***

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P(X) = X^5 - 1$$

$$Q(X) = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 + X + 1$$

$$R(X) = 2X^3 - X^2 - 2X + 6$$

Indication pour la dernière factorisation : on pourra calculer $R(1+j)$.

Exercice 7 : ***

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

Applications à l'électricité

Exercice 8 : **

On considère deux impédances équivalentes complexes Z_1 et Z_2 définies par

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

On considère la fonction de transfert H associée à un filtre fréquentiel à base d'AOP définie par

$$H(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Montrer que $H(\omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{-1}{2 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

où x est à déterminer.

Exercice 9 : ***

On considère une association en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L . Cet ensemble est mis en parallèle avec un condensateur de capacité C .

Aux bornes de ce circuit, on applique une tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$. On se place en régime permanent.

1. Faire un schéma et rappeler les expressions des impédances complexes associées.
2. Donner les expressions de $\underline{Z}(\omega)$ et de son module.
3. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de ω a-t-on $\underline{Z}(\omega)$ réel?
(b) Envisager le cas particulier où R^2C est négligeable devant L .

Nombre complexes et transformations du plan

Exercice 10 : (d'après concours ENSEA 2007) ***

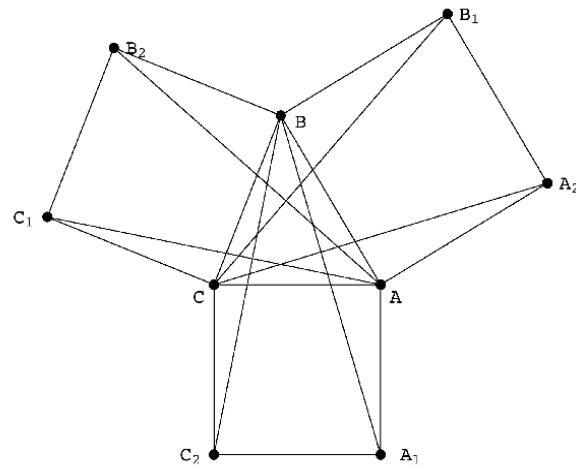
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère trois points quelconques non alignés A,B,C d'affixe a, b, c respectivement. Le triangle ABC est quelconque mais les sommets sont donnés dans le sens direct comme dans la figure ci-contre.

Soient les nombres complexes :

$$\begin{array}{lll} a_1 = a + (c - a)i & b_1 = b + (a - b)i & c_1 = c + (b - c)i \\ a_2 = a - (b - a)i & b_2 = b - (c - b)i & c_2 = c - (a - c)i. \end{array}$$

Les points sont donnés par leurs affixes :

$A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $C_1(c_1)$, $A_2(a_2)$, $B_2(b_2)$, $C_2(c_2)$.



1. Passe-t-on de C à A_1 par une rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$?
2. Les segments $[BA_1]$ et $[CA_2]$ ont-ils toujours la même longueur ?
3. Les droites (BA_1) et (CA_2) sont-elles toujours orthogonales ?
4. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ a-t-il pour affixe $(b+c)i$?
5. A-t-on : $A_1A_2^2 = BA^2 + CA^2 + (a-b)(\bar{a}-\bar{c}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{b})$?

TD 5 : FONCTIONS RECIPROQUES
Capacités attendues autour des fonctions réciproques :

- Justifier l'existence d'une application réciproque.
- Déterminer des images par une application réciproque.
- Déterminer l'expression d'une application réciproque.
- Manipuler la fonction arctan.
- Déterminer une mesure d'angle à l'aide de la fonction arctan.

Généralités

Exercice 1 : *

 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = x^3 + 1$$

1. Justifier que f admet une application réciproque, notée f^{-1} .
Préciser pour ces deux fonctions les domaines de définition et d'arrivée (espace image).
2. Déterminer, par f^{-1} , les images de 1 et 9.
3. Déterminer l'expression de f^{-1} .

Exercice 2 : **

 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - 2x$$

1. Étudier les variations de f . f admet-elle une application réciproque sur \mathbb{R} ?
2. Déterminer la fonction réciproque correspondant à chaque intervalle de stricte monotonie de la fonction f .
3. Donner l'allure de la représentation graphique de chaque fonction réciproque.
4. Étudier la dérivabilité de ces fonctions réciproques.

 Fonctions réciproques associées aux fonctions
circulaires

Exercice 3 : **

1. Déterminer les valeurs de $\tan 0$ et $\tan \frac{\pi}{4}$. En déduire les images de 0 et 1 par la fonction arctan.
2. Donner l'allure de la courbe de la fonction arctan.
3. Déterminer la dérivée de la fonction composée $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Donner l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 : **

1. En utilisant la fonction arctan, déterminer un argument des nombres complexes suivants :
 $z_1 = 1 + j$; $z_2 = 2 - 2j$; $z_3 = -1 - \sqrt{3}j$ et $z_4 = -5\sqrt{3} + 5j$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. On considère la fonction f définie par : $f(t) = \sin(\omega t) + \sqrt{3} \cos(\omega t)$.
Exprimer f sous la forme $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ en définissant φ à l'aide de arctan.

Exercice 5 : ***

 En considérant $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$, montrer que : $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Exercice 6 : ***

 Montrer que, pour tout $x \in]-1; 1]$, on a l'égalité suivante : $2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos(x)$.

Fonctions réciproques associées aux fonctions
hyperboliques**Exercice 7 : *****

On considère les fonctions cosinus et sinus hyperboliques définies sur \mathbb{R} respectivement par :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Étudier les variations de ces deux fonctions et établir leurs tableaux de variations.
2. Montrer que, pour tout x réel, on a : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
3. Résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation : $\cosh x = 2$.
4. Justifier que la fonction $\operatorname{argcosh}$, fonction réciproque de la restriction de \cosh à \mathbb{R}^+ , dérivable sur $]1; +\infty[$ est telle que :

$$\forall t > 1, (\operatorname{argcosh})'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

En déduire que : $\forall t \geq 1, \operatorname{argcosh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$.

TD 6 : DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES
Capacités attendues :

- Écrire la forme générale d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur \mathbb{R} .
- Calculer les coefficients d'éléments de première espèce du type $\frac{a}{(X - \lambda)^n}$.
- Calculer les coefficients d'éléments de seconde espèce du type $\frac{aX + b}{X^2 + \alpha X + \beta}$ avec $\Delta < 0$.

Exercice 1 : *

Dans cet exercice, aucun calcul de coefficient n'est à effectuer.

Écrire la forme générale de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{2}{X^2 + 3X + 2} \quad ; \quad G(X) = \frac{2}{X^3 + 3X^2} \quad ; \quad H(X) = \frac{2X^2 + 1}{X^2 + X} \quad ; \quad K(X) = \frac{2}{X^3 - X^2 + X}.$$

Exercice 2 : **

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F(X) = \frac{2}{X^2 + 3X + 2}$
- $G(X) = \frac{2}{X^3 + 3X^2}$
- $I(X) = \frac{X + 1}{X^3 + X^2 - 2X}$.

Exercice 3 : **

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^3 - 2X^2 + X}$.
- $F_2(X) = \frac{4}{(X^2 - 1)^2}$.
- $F_3(X) = \frac{X^3 + 2X - 1}{X(X - 1)}$.
- $F_4(X) = \frac{X + 2}{X^3 - 8}$.
- $F_5(X) = \frac{2}{X^2(X - 2)}$.
- $F_6(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)}$.
- $F_7(X) = \frac{2X - 1}{X^2 - 3X + 2}$.
- $F_8(X) = \frac{X^4}{X^2 - X - 6}$.

Exercice 4 : ***

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible et α un pôle simple de F .

On peut donc écrire $Q = (X - \alpha)\widehat{Q}$ avec $\widehat{Q}(\alpha) \neq 0$ ce qui conduit à une décomposition en éléments simples de la forme :

$F = \frac{P}{(X - \alpha)\widehat{Q}} = G + \frac{\lambda}{X - \alpha}$ où G est une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle.

1. Montrer que : $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

2. En déduire la décomposition en éléments simples de $F = \frac{3X - 4}{X^2 - 3X + 2}$.

3. On pose $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $n \geq 2$.

Réduire au même dénominateur $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}$.

TD 7 : INTEGRATION

Capacités attendues :

- Déterminer une primitive et calculer une intégrale.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
- Calculer une intégrale en utilisant un changement de variable.
- Calculer des moyennes et valeurs efficaces de fonctions.

Généralités

Exercice 1 : *

Compléter les pointillés afin de déterminer une primitive :

$$\int x^2 + 3x + 1 \, dx = \dots x^3 + \dots x^2 + \dots ; \quad \int \cos(x) \times \sin^2(x) \, dx = \dots \sin^{\dots}(x)$$

$$\int \frac{4x}{x^2 + 1} \, dx = \dots \ln(x^2 + 1) ; \quad \int xe^{x^2} + \frac{1}{x^2} \, dx = \dots e^{x^2} + \dots$$

Exercice 2 : **

Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies par :

- $f(x) = -3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^5}$.
- $g(x) = \frac{4}{(3x + 2)^4}$;
- $h(x) = 2 \cos(3x) [\sin(3x)]^3$;
- $l(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \quad (x > 1)$;
- $n(x) = \tan(x)$ avec $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$;
- $m(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$;
- $v(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$.

Exercice 3 : **

En électrostatique, le potentiel V est obtenu en intégrant le champ électrique. On a

$$V(x) = - \int E(x) \, dx$$

Déterminer le potentiel pour les trois champs suivants :

1. $E(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Lx}$ (champ créé par un fil de longueur L portant une charge Q).
2. $E(x) = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ (champ créé par un plan de surface S portant une charge Q).
3. $E(x) = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ (champ créé par à l'intérieur d'une boule de rayon R , portant une charge Q dans son volume).

Exercice 4 : **

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^3 \frac{1 + xe^x}{x} \, dx \quad ; \quad \int_1^9 \frac{2}{\sqrt{x}} - 5x^2 \, dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} \, dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \, dx ;$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2} \, dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \cos(3x) \, dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \, dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \, dx .$$

Intégration par parties

Exercice 5 : **

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x e^{3x} dx \quad ; \quad B = \int_1^t x \ln x dx \text{ où } t > 0 \quad ; \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(3x) dx.$$

Valeurs moyenne et efficace

Exercice 6 : **

Déterminer les valeurs moyennes et efficaces des signaux périodiques représentés ci-dessous :

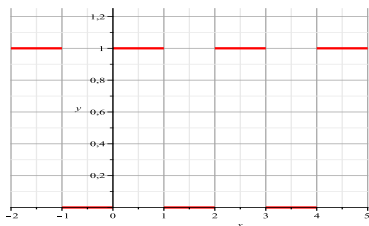


FIGURE 2 – Signal avec échelons

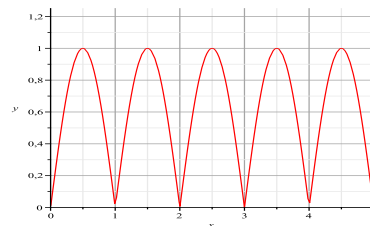


FIGURE 3 – Signal sinusoïdal redressé

Changements de variable

Exercice 7 : **

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} \text{ en posant } t = \frac{x}{3} \quad \text{et} \quad B = \int_1^2 (\ln x)^2 dx \text{ en posant } y = \ln x.$$

Parité et intégration

Exercice 8 : **

1. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et ϕ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\phi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.
 - (a) Justifier que ϕ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $\phi'(x)$ ainsi que $\phi(0)$.
 - (b) Montrer que si f est paire alors $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$.
 - (c) Montrer que si f est impaire alors $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$.
2. Applications aux signaux périodiques
 - (a) Déterminer la valeur moyenne du signal défini sur \mathbb{R} par $f(t) = |\sin t|$.
 - (b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire et vérifiant

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pour tout } t \in]0, 2\pi[.$$

- i. Déterminer $f(0)$.
- ii. Représenter graphiquement cette fonction.
- iii. Déterminer la valeur moyenne de f .
- iv. Déterminer la moyenne quadratique de f .

Exercice 9 : ***

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, dx$.

2. En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \arctan x$, la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx.$$

Exercice 10 : Suites et intégrales ***

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = |\sin(t)|$.

1. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t) \, dt$.

2. Calculer la valeur de $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(2nt) \, dt$ pour tout entier n non nul.

Exercice 11 : Intégrale de Wallis ***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

1. Montrer que $I_n > 0$ puis que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ (en posant $x = \frac{\pi}{2} - t$).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.

Exercice 12 : Expression de e comme limite d'une suite ***

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

2. Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3. En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

